Die

Grenzwerte der thermodynamischen Energieumwandlung.

Inaugural-Dissertation,

der II. Section der philosophischen Facultät

der

Kgl. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

zur Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt von

Hans Lorenz

aus Leipzig.

München 1895.

Druck von R. Oldenbourg.

Die

Grenzwerte der thermodynamischen Energieumwandlung.

Inaugural-Dissertation,

der II. Section der philosophischen Facultät

der

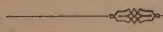
Kgl. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

zur Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt von

Hans Lorenz

aus Leipzig.



München 1895.

Druck von R. Oldenbourg.

Herrn Geheimen Rat

Dr. Gustav Zeuner

Professor an der Kgl. Sächs. Technischen Hochschule
zu Dresden

in dankbarer Verehrung

zugeeignet

vom Verfasser.

I.

Vorbemerkung.

1. Definition thermodynamischer Maschinen.

Unter einer thermodynamischen Maschine soll im Folgenden allgemein eine Vorrichtung verstanden werden, in welcher eine Umwandlung von Wärme in mechanische Arbeit oder umgekehrt von Arbeit in Wärme stattfindet. Vorrichtungen der ersten Art, denen immer ein Wärmeübergang von einem höher temperierten Körper nach einem von niederer Temperatur eigentümlich ist, bezeichnet man als Wärmekraftmaschinen; sie finden in der Technik vielfältige Anwendung als Motoren. Von den Vorrichtungen der zweiten Art interessieren uns nur solche, welche zur Überführung der Wärme von einem Körper mit niederer Temperatur nach einem solchen von höherer Temperatur dienen, und die man als Kühlmaschinen zu bezeichnen pflegt.

In beiden Maschinengattungen werden von Körpern, auf die wir weiter unten zu sprechen kommen, unter periodischer Aufnahme und Abgabe von Wärme Kreisprozesse vollzogen, welche

ihrerseits wieder umkehrbar und nicht umkehrbar sein können. Streng genommen treten in der Technik vollkommen umkehrbare Kreisprozesse überhaupt nicht auf, dagegen ist bei einer grofsen Zahl von thermodynamischen Maschinen das Bestreben erkennbar, sich solchen möglichst zu nähern. Aufserdem führt die Untersuchung der umkehrbaren Kreisprozesse zu wesentlich einfacheren und damit übersichtlicheren Ergebnissen, als die der nicht umkehrbaren, und läfst insbesondere die Aufstellung gewisser Maschinenanordnungen zu, welche man aus später zu erörterten Gründen theoretisch vollkommene nennt. Wir wollen uns darum zunächst nur mit der Theorie umkehrbarer Kreisprozesse beschäftigen und für diese die Bedingungen einer möglichst günstigen Ausnutzung der gebotenen Energie ermitteln.

Die mit diesen Bedingungen berechneten Verwandlungsgröfsen der Energie stellen alsdann diejenigen Grenzwerte dar, deren Feststellung die Hauptaufgabe der vorliegenden Schrift bildet.

II.

Allgemeine Theorie theoretisch vollkommener thermodynamischer Maschinen.

2. Bedingungsgleichung für den Beharrungszustand.

Der Kreisprozefs des in einer thermodynamischen Maschine befindlichen sogenannten arbeitenden oder vermittelnden Körpers vollzieht sich, wie schon Eingangs erwähnt, unter zeitweiser Aufnahme und Abgabe von Wärme. Die Wärmeaufnahme kann, wenn sie von selbst erfolgen soll, nur von einem Körper stattfinden, welcher während dieser Periode eine höhere oder mindestens dieselbe Temperatur besitzt, wie der arbeitende, die Wärmeabgabe nur an einen solchen von niederer oder höchstens derselben Temperatur. Es ist darum für die Durchführung eines Kreisprozesses das Vorhandensein zweier solcher Körper von verschiedener Temperatur unerläfslich, welche man allgemein verständlich als Heiz- und Kühlkörper bezeichnet, und zwischen denen der arbeitende Körper den Wärmeübergang vermittelt.

Es sei jetzt Q_1 die vom Heizkörper in der Zeiteinheit abgegebene und in Wärme-Einheiten (*WE*, bezogen auf die Temperatursteigerung von 1 kg Wasser von 0^0 auf 1^0 Cels.) ausgedrückte Wärmemenge, Q_2 die in derselben Zeit vom Kühlkörper aufgenommene Wärme, so wird, da nach dem Durchlaufen des Kreisprozesses der arbeitende Körper keine Energievermehrung oder Verminderung erfahren hat, derselbe eine Arbeit von L Meterkilogramm (mkg) entweder geleistet oder verzehrt haben, welche, wenn $A = \frac{1}{424}$ die Äquivalentzahl zwischen Wärme und mechanischer Arbeit bedeutet, nach dem ersten Hauptsatze der Thermodynamik durch die Gleichung

$$A L = Q_1 - Q_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

gegeben ist. Ist hierin $Q_1 > Q_2$, so wird $L > 0$, d. h. es wird Arbeit gewonnen, während für $Q_1 < Q_2$ $L < 0$ ausfällt, mithin Arbeit aufzuwenden ist. Der erstere Fall entspricht den Wärmekraftmaschinen, der zweite den Kühlmaschinen; die Gleichung (1) selbst ist dagegen allgemein giltig für alle thermodynamischen Maschinen, welche in einem sogenannten Beharrungszustande Kreisprozesse vollziehen, wobei es gleichgiltig ist, ob diese letzteren umkehrbar sind, oder nicht.

3. Bedingungsgleichung für die Umkehrbarkeit des Kreisprozesses.

Soll der Kreisprozefs unseren Voraussetzungen nach ein umkehrbarer sein, so wird, wenn wir unter T die absolute variable Temperatur des arbeitenden Körpers verstehen, noch die aus dem zweiten

Hauptsatze der Thermodynamik hervorgehende Gleichung

$$\int \frac{dQ}{T} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

erfüllt, in welcher die Integration sich über den ganzen Verlauf des Prozesses zu erstrecken hat. Zerfällt insbesondere der Kreisprozefs in eine Reihe aufeinander folgender Perioden, denen Zustandsänderungen des arbeitenden Körpers von einer Temperatur zur anderen entsprechen, die sich nicht stetig in einander überleiten lassen, so ist der Ausdruck (2) diesen Perioden entsprechend in eben so viele einzelne Integrale zu zerlegen, deren Integrationsgrenzen (Temperaturen $T_1\, T_2\, T_3 \ldots T_n$) sich zyklisch aneinanderreihen, also

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T} + \int_{T_2}^{T_3} \frac{dQ}{T} + \ldots\ldots + \int_{T_{n-1}}^{T_n} \frac{dQ}{T} + \int_{T_n}^{T_1} \frac{dQ}{T} = 0. \quad (3)$$

Setzen wir nun weiter voraus, dafs der in Frage stehende Kreisprozefs sich nur zwischen zwei Körpern, also einem Heiz- und einem Kühlkörper, vollzieht, so läfst sich, wenn der Prozefs ein umkehrbarer bleiben soll, zeigen, dafs der arbeitende Körper niemals mit dem Heiz- und dem Kühlkörper gleichzeitig in Berührung stehen darf. Fände nämlich ein solcher doppelter Wärmeaustausch statt, so würde hierbei einfach die Wärme von dem höher temperierten Körper durch den arbeitenden hindurch nach dem Körper von niederer Temperatur übergehen, ein Vorgang, der ohne Kompensation verläuft und darum auch nicht umkehrbar ist. Mithin

ist in unserem Falle die Periode der Wärmeaufnahme vollständig von der der Wärmeabgabe zu trennen.

Aufser diesen beiden mit Wärmeaustausch verbundenen Zustandsänderungen wird der arbeitende Körper aber noch weiteren unterworfen sein, die jedoch, da er hierbei mit Körpern von anderer Temperatur nicht in Berührung kommen soll, nur adiabatischer Natur sein können. Für diese aber wird $dQ = 0$, und damit verschwinden, in Gleichung (3) alle hierauf bezüglichen Glieder, und es bleibt, wenn wir von den Integrationsgrenzen vorläufig absehen und den Prozefs so verlaufen lassen, dafs der Wärmeaustausch nur zwischen zwei Körpern von statten geht,

$$\int \frac{dQ_1}{T} + \int \frac{dQ_2}{\theta} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

worin T die absolute variable Temperatur des arbeitenden Körpers während der Aufnahme der Wärme Q_1, θ die entsprechende Temperatur während der Abgabe der Wärme Q_2 bedeuten möge. Man erkennt übrigens sofort, dafs beim Vorhandensein mehrerer Heiz- und Kühlkörper die Zahl der Glieder in (4) sich entsprechend erhöht, so zwar, dafs jedem derselben bezw. jeder einzelnen Wärmeübergangsperiode ein Integral entspricht. Die Auswertung dieser Integrale, welche, wie ersichtlich, den algebraischen Zuwachs der Entropie des arbeitenden Körpers in der betreffenden Periode bedeuten, ist naturgemäs nur möglich, wenn der Zusammenhang zwischen den Wärmemengen Q und der Temperatur gegeben ist.

4. Bedingungen für die Vollkommenheit des Kreisprozesses.

Für diesen Zusammenhang ist zunächst eine Bedingung wichtig, welche sich aus der Forderung ergibt, dafs die Ausnutzung der gebotenen Energie in unserer thermodynamischen Maschine ein Maximum, diese selbst mithin eine theoretisch vollkommene sein soll. Wir haben schon oben erwähnt, dafs wenn die beiden Wärmeübergänge von selbst erfolgen sollen, die Temperatur des arbeitenden Körpers bei der Wärmeaufnahme niemals höher sein kann, als die des Heizkörpers, bei der Wärmeabgabe dagegen nicht unter die des Kühlkörpers sinken darf. Bleibt sie aber im ersteren Fall immer unter der des Heizkörpers, im zweiten stets über der des Kühlkörpers, so steht wohl den kompensationslosen Wärmeübertragungen selbst nichts im Wege, dagegen entspricht dem auf diese Weise entstehenden Temperaturgefälle bei Wärmekraftmaschinen ein nicht benutzter Wärmeübergang von einem höheren zu einem tieferen Temperaturniveau, während die Kühlmaschinen durch die Senkung der Temperatur unter die des (hier kalten) Heizkörpers und Steigerung über die des (hier wärmeren) Kühlkörpers neue durch Arbeit zu kompensierende negative Temperaturgefälle geschaffen werden.

Alle diese Temperaturgefälle fallen weg, und damit wird für Wärmekraftmaschinen das Maximum an Arbeitsgewinn, für Kühlmaschinen das Minimum an Arbeitsaufwand gewährleistet, wenn die Temperatur des vermittelnden Körpers während der ganzen Periode der Wärmeaufnahme sich nur unendlich wenig von der Temperatur des Heizkörpers, in

der Periode der Wärmeabgabe sich dagegen nur unendlich wenig von der des Kühlkörpers unterscheidet.

Diese praktisch mit der Forderung einer jeweiligen Übereinstimmung der Temperaturen zusammenfallende Bedingung ist natürlich nicht vollkommen erfüllbar, und hierin liegt die Hauptursache. dafs in Wirklichkeit, wie wir in der Vorbemerkung erwähnten, vollkommen umkehrbare Kreisprozesse nicht auftreten; dagegen steht uns nichts im Wege, das thatsächlich auftretende Temperaturgefälle z. B. durch Vergrößerung der wärmeübertragenden Flächen (sog. Heizflächen) beliebig zu verringern, bezw. für die theoretisch vollkommene Maschine diese Flächen als unendlich grofs vorauszusetzen. Hieraus ergibt sich dann die wichtige Folgerung, dafs wir in der Gleichung (4) die Temperaturen des arbeitenden Körpers jeweils durch die des Heizkörpers bezw. des Kühlkörpers ersetzen dürfen, und dafs wir im Zusammenhange hiermit auch die Wärmemengen Q_1 und Q_2 für die theoretisch vollkommene Maschine lediglich aus den Zustandsgleichungen des Heiz- und Kühlkörpers berechnen können.

Auf diese Weise sind alle Gröfsen, welche sich auf den arbeitenden Körper bezogen, über den wir vorläufig ohnehin nichts festgesetzt hatten, aus der Gleichung (4) verschwunden, woraus weiterhin folgt, dafs die Eigenschaften des arbeitenden Körpers auf den Arbeitsgewinn bezw. Aufwand und auf die Wärmeübergänge in einer theoretisch vollkommenen Maschine ohne jeden Einflufs sind.

Es ist also vollkommen gleichgiltig, welcher Körper in der Maschine als arbeitender den Kreisprozefs vollzieht.[1])

5. Fundamentalgleichungen.

Es sei jetzt das in der Zeiteinheit zur Verfügung stehende Gewicht des Heizkörpers H kg und dQ_1 wieder die in einem Zeitelement von demselben abgegebene Wärme. Dieselbe wird, wenn jeder Teil des Heizkörpers in gleicher Weise am Wärmeaustausche teilnimmt, dem Gewichte H proportional sein, aufserdem aber als Funktion der drei Variabelen, der Temperatur T, des Druckes p_h und des spezifischen Volumens (d. i. des Volumens der Gewichtseinheit) v_h in die Gleichung (4) eintreten. Von diesen drei Variabeln läfst sich mit Hilfe der als bekannt vorausgesetzten Zustandsgleichung immer eine eliminieren, so dafs wir in jedem Falle nur zwei der selben in die Gleichung einzuführen (4) brauchen. Wir können demnach setzen

$$\left.\begin{array}{lll} Q_1 = Hf_1(Tp_h) \text{ mithin } & dQ_1 = \dfrac{\partial f_1}{\partial T}dT + \dfrac{\partial f_1}{\partial p_h}dp_h & \\ \text{oder } Q_1 = H\varphi_1(Tv_h) \quad \text{»} & dQ_1 = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial T}dT + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v_h}\partial v_h & \\ \text{» } Q_1 = H\psi_1(p_h v_h) \quad \text{»} & dQ_1 = \dfrac{\partial \psi_1}{\partial p_h}dp_h + \dfrac{\partial \psi_1}{\partial v_h}\partial v_h & \end{array}\right\} (5)$$

[1]) Die oben entwickelten Sätze sind nicht neu und finden sich wohl in allen Schriften über Thermodynamik, in denen theoretisch vollkommene Maschinen behandelt werden. Bisher bezeichnete man jedoch hiermit nur solche, welche Carnot'sche Kreisprozefse vollziehen, während der von mir aufgestellte Begriff einer vollkommenen Maschine wesentlich weiter ist und auch die Veränderlichkeit der Temperaturen des Heiz- und Kühlkörpers berücksichtigt. Diese Erweiterung zwang demnach zur erneuten Herleitung der bekannten Sätze.

und, da dieselben Überlegungen auch für den Kühlkörper, dessen Menge in der Zeiteinheit K kg betragen möge, gelten, so wird

$$\left.\begin{aligned} Q_2 &= K f_2(\theta p_k) \text{ mithin } dQ_2 = \frac{\partial f_2}{\partial \theta} d\theta + \frac{d f_2}{\partial p_k} dp_k \\ \text{oder } Q_2 &= K\varphi_2(\theta v_k) \quad \text{» } dQ_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v_k} dv_k \\ \text{» } Q_2 &= K\psi_1(\theta v_k) \quad \text{» } dQ_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial p_k} dp_k + \frac{\partial \psi_2}{\partial v_k} dv_k \end{aligned}\right\} (6),$$

worin die Gröfsen θ, p_k und v_k die für den Zustand des Kühlkörpers charakteristischen Variabelen bedeuten.

Von den so erhaltenen 6 Ausdrücken für die totalen Differentiale dQ_1 und dQ_2 wird man im einzelnen Falle immer diejenigen verwenden, welche sich den Bedingungen der gestellten Aufgabe am leichtesten anpassen.

Setzt man dieselben in Gleichung (4) ein, so ergeben sich, da jeder Ausdruck von (5) mit jedem von (6) kombiniert werden kann, 9 verschiedene, jedoch mit einander vertauschbare Gleichungen von der Form:

$$\left.\begin{aligned} H\int \frac{1}{T}\left(\frac{\partial f_1}{\partial T} dT + \frac{\partial f_1}{\partial p_h} dp_h\right) \\ + K\int \frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial f_2}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f_2}{\partial p_k} dp_k\right) = 0 \\ H\int \frac{1}{T}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial T} dT + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v_h} dv_h\right) \\ + K\int \frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v_k} dv_k\right) = 0 \end{aligned}\right\} (7)$$

u. s. w.

Unter den Integralzeichen dieser Gleichungen stehen nun durchgehends Differentiale, welche je zwei von einander unabhängige Variabele enthalten. Zur weiteren Verfolgung des Problems ist es daher notwendig, Bedingungsgleichungen für das Verhalten des Heiz- und Kühlkörpers aufzustellen, durch welche eine der beiden Variabelen eliminiert werden kann. Alsdann steht der Ausführung der Integration nichts mehr entgegen.

Die einfachsten und auch praktisch wichtigsten Bedingungen erhalten wir nun, indem wir je eine der Variabelen für den Heizkörper und den Kühlkörper konstant setzen. Dies kann, da von den 6 Variabelen immer je 2 in Frage kommen, wieder auf 9 verschiedene Arten geschehen, sodafs man sich für jede Kombination einer der 9 Gleichungen (7) bedienen kann. Wir wollen der Einfachheit halber hier nur die Fälle diskutieren, bei denen gleichzeitig

1. $T =$ Konst. und $\theta =$ Konst.,
oder 2. $p_h =$ Konst. » $p_k =$ Konst.
» 3. $v_h =$ Konst. » $v_k =$ Konst.

vorausgesetzt werden.

6. Isothermische Zustandsänderungen des Heiz- und Kühlkörpers.

Sind die beiden Temperaturen T und θ gleichzeitig konstant, so können wir direkt auf Gleichung (4) zurückgreifen und die dort angedeuteten Integrationen ausführen. Mit Rücksicht auf das in Bezug auf den arbeitenden Körper entgegengesetzte Vorzeichen der resultierenden Wärmemengen Q_1 und Q_2 erhalten wir dadurch

$$\frac{Q_1}{T} - \frac{Q_2}{\theta} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

die bekannte Gleichung für den Carnotschen Kreisprozefs, der also für den Fall unveränderlicher Temperaturen des Heizkörpers und Kühlkörpers sowohl für Wärmekraft-, wie auch für Kühlmaschinen die günstigste Ausnutzung der verfügbaren Energie ergibt. Die gewonnene Arbeit für die erste Maschinengattung, sowie der Arbeitsaufwand für die zweite berechnen sich mit Hilfe von (8) aus der allgemein giltigen Gleichung (1). Wir erhalten so durch Elimination von Q_2 die bekannte Formel

$$\frac{AL}{Q_1} = \frac{T-\theta}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

deren rechte Seite man auch wohl als den ökonomischen Koeffizienten einer zwischen den Temperaturgrenzen T und θ arbeitenden thermodynamischen Maschine bezeichnet. Aus den bisherigen Ausführungen dürfte hervorgehen, dafs die allgemeine Verwendung dieser Formel (9) zur Beurteilung thermodynamischer Maschinen nicht gerechtfertigt ist, weil die Unveränderlichkeit der Temperaturen der beiden Körper, zwischen denen der Wärmeaustausch stattfindet, nur in ganz speziellen Fällen der Wirklichkeit entspricht. Insbesondere trifft diese Annahme dann niemals zu, wenn wir es mit Körpern zu thun haben, welche durch Wärmezu- oder Abfuhr ihre Temperatur nahezu proportional derselben ändern, d. h. aber in weitaus den meisten Fällen. Sollen solche Körper durch Aufnahme und Abgabe endlicher Wärmemengen ihre Temperatur nur unendlich wenig ändern, so müssen sie in unendlich grofser Masse verfügbar sein, eine Annahme, die, wenigstens für Heizkörper fast nie auch nur annähernd erfüllt ist.

Dagegen ist die Annahme konstanter Temperaturen und damit die Verwendung der Formeln (8) und (9) in dem speziellen Falle gerechtfertigt, wenn sowohl der Heizkörper, als auch der Kühlkörper während des Wärmeaustausches mit dem in der Maschine arbeitenden Körper bei konstantem Drucke Aggregatzustandsänderungen erleiden.

7. Zustandsänderungen des Heiz- und Kühlkörpers bei konstantem Druck.

Wichtiger und insbesondere allgemeiner als die Voraussetzung konstanter Temperaturen ist die Annahme von Zustandsänderungen des Heiz- und Kühlkörpers bei konstantem Drucke, die ja auch für die soeben erwähnten Aggregatzustandsänderungen unerläfslich ist und somit den einzigen Fall in sich begreift, für den Carnotsche Kreisprozesse ausführbar werden.

Alsdann wird $dp_h = 0$ bezw. $dp_k = 0$, und die unter den Integralzeichen der ersten Gleichung (7) übrig bleibenden partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial f_1}{\partial T}$ und $\frac{\partial f_2}{\partial T}$ stellen die spezifischen Wärmen des Heiz- und Kühlkörpers für konstanten Druck dar. Wir wollen dieselben der Kürze halber mit c_1 und c_2 bezeichnen. Weiterhin sei jetzt die Maximaltemperatur des Heizkörpers T_1, die Minimaltemperatur T_2, die Maximaltemperatur des Kühlkörpers θ_1, seine Minimaltemperatur aber θ_2, dann haben wir statt (7)

$$H \int_{T_2}^{T_1} c_1 \frac{dT}{T} + K \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} c_2 \frac{d\theta}{\theta} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Die spezifischen Wärmen c_1 und c_2 sind nun im allgemeinen nicht konstant, sondern mit der Temperatur veränderlich. Bevor man also die Integration in (10) ausführen kann, ist diese Veränderlichkeit festzustellen. Kann man aber, und dies ist in zahlreichen praktisch wichtigen Fällen durchaus gerechtfertigt, von dieser Veränderlichkeit absehen, so ergibt sich aus (10) sofort

$$Hc_1 \lg n \frac{T_1}{T_2} = Kc_2 \lg n \frac{\theta_1}{\theta_2} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

oder

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{Hc_1} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{Kc_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11a).$$

Die Einführung der spezifischen Wärmen gestattet uns auch sofort die Berechnung der übertretenden Wärmemengen Q_1 und Q_2. Aus den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} dQ_1 &= Hc_1\, dT \\ dQ_2 &= Kc_2\, d\theta \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

welche an sich nur die Definition der spezifischen Wärmen andeuten, folgt für $c_1 =$ Konst. und $c_2 =$ Konst.

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= Hc_1 (T_1 - T_2) \\ Q_2 &= Kc_2 (\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13),$$

welche Gleichungen mit (11) und (1) die Energieumwandlung in der vollkommenen thermodynamischen Maschine für konstanten Druck des Heiz- und Kühlkörpers, sowie für unveränderliche spezifische Wärmen c_1 und c_2 vollständig bestimmen.[1])

[1]) Diese spezielle Lösung des Problems veröffentlichte ich zuerst in einem Aufsatze »Beiträge zur Beurtheilung der Kühlmaschinen« in der »Zeitschrift des Vereins deutscher

Sind die spezifischen Wärmen dagegen stark veränderlich, so ist es doch meistens zulässig, sie als Funktionen der absoluten Temperaturen und zwar in Potenzreihen zu entwickeln, also

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \alpha_0 + \alpha_1 T + \alpha_2 T_1^2 + \ldots \\ c_2 &= \beta_0 + \beta_1 \theta + \beta_2 \theta^2 + \ldots \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (14),$$

deren Koeffizienten α und β empirisch bestimmt werden.

Da die Auswertung der Integrale in (10) auch mit dieser Annahme keine nennenswerten Schwierigkeiten bietet, die Resultate aber zu weiteren Bemerkungen kaum Anlafs geben, so soll hierauf nicht näher eingetreten werden.

8. Ökonomischer Koeffizient.

Kehren wir jetzt wieder zu der Annahme $c_1 = \text{Konst.}$ und $c_2 = \text{Konst.}$ zurück, so können wir

Ingenieure« 1894, Heft 3 bis 5. Kurz darauf stellte mir Herr Prof. M. Schröter an der techn. Hochschule zu München eine Abhandlung von G. Richmond: »Notes on the Refrigeration Process and its proper place in Thermodynamics« zu, welche u. a. auch die Gleichung (11) allerdings mit der Einschränkung enthält, dafs $T_2 = \theta_1$ sein soll. Merkwürdigerweise verfolgt der Verf. diese Gleichung nicht weiter, sodafs sie bisher kaum beachtet wurde. Ebenso habe ich dieselbe weder in älteren deutschen Werken (vor 1893), noch auch in neueren Originalabhandlungen gefunden, als ich, nachdem ich ganz unabhängig zu derselben gelangt war, die Literatur mit grofser Aufmerksamkeit daraufhin durchsah. Wenn ich nun auch kaum die Priorität, diese wichtige Gleichung zuerst aufgestellt zu haben, beanspruchen darf, so glaube ich doch neben ihrer allgemeinen Gestalt ihre Bedeutung für die Beurteilung thermodynamischer Maschinen zuerst erkannt und sie hierzu angewendet zu haben. Ebenso darf ich wohl die Aufstellung des unten zur Besprechung gelangenden Schemas der vollkommenen Maschine als mein Eigentum beanspruchen einschliefslich aller daran geknüpften Untersuchungen.

aus den für diesen Fall gültigen Gleichungen (1), (11) und (13) sofort den ökonomischen Koeffizienten für eine thermodynamische Maschine, deren Heiz- und Kühlkörper bei konstantem Drucke durch den Wärmeaustausch ihre Temperaturen ändern, berechnen. Setzen wir nämlich die Werte von (13) in (1) ein, so wird

$$\frac{AL}{Q_1} = \frac{Hc_1(T_1 - T_2) - Kc_2(\theta_1 - \theta_2)}{Hc_1(T_1 - T_2)}$$

oder mit Rücksicht auf (11)

$$\frac{AL}{Q_1} = \frac{(T_1 - T_2)\lg n\frac{\theta_1}{\theta_2} - (\theta_1 - \theta_2)\lg n\frac{T_1}{T_2}}{(T_1 - T_2)\lg n\frac{\theta_1}{\theta_2}} \quad (15),$$

ein Ausdruck, der ebenso, wie der für den Carnotschen Kreisprozefs, lediglich Temperaturen enthält. Für die rechnerische Verwertung der entwickelten Gleichungen hat man übrigens immer die Gröfsen H, K, c_1, c_2, T_1 und θ_2 als unmittelbar gegeben anzusehen, während die Endtemperatur T_2 des Heizkörpers der jeweiligen Aufgabe entsprechend gewählt werden kann. Die anderen Gröfsen Q_1, Q_2, θ_2 und L ergeben sich dann aus den vorliegenden Gleichungen.

Für die Wahl der Endtemperatur T_2 ist natürlich der Gesichtspunkt mafsgebend, dafs mit ihrer Verringerung die zugeführte Wärme Q_1 zunimmt; sie ist demnach so niedrig als möglich einzusetzen, wenn sie nicht (wie z. B. bei Kühlmaschinen) durch die Aufgabe selbst unmittelbar gegeben ist. Für Wärmekraftmaschinen, bei denen der Heizkörper durchgehends ein gasförmiges Verbrennungsprodukt ist, welches nach seiner Ausnutzung in die Atmo-

sphäre ausgestofsen wird, dürfte die Temperatur der Atmosphäre selbst diese unterste Grenze darstellen.

9. Näherungsgleichung.

Die für den ganzen Kreisprozefs charakteristische Gleichung läfst übrigens eine bemerkenswerte Näherungsform zu. Entwickelt man nämlich die natürlichen Logarithmen in Reihen von der Form

$$\left.\begin{aligned} \lg n\left(\frac{T_1}{T_2}\right) &= 2\left\{\frac{T_1-T_2}{T_1+T_2}+\frac{1}{3}\left(\frac{T_1-T_2}{T_1+T_2}\right)^3+\cdots\right\} \\ \lg n\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) &= 2\left\{\frac{\theta_1-\theta_2}{\theta_1+\theta_2}+\frac{1}{3}\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{\theta_1+\theta_2}\right)^3+\cdots\right\} \end{aligned}\right\} \quad (16),$$

so kann man der starken Konvergenz derselben wegen sehr häufig die Glieder mit höheren Potenzen vernachlässigen. Damit geht aber (11) über in

$$Hc_1\frac{T_1-T_2}{T_1+T_2}=Kc_2\frac{\theta_1-\theta_2}{\theta_1+\theta_2}$$

oder wegen (13)

$$\frac{Q_1}{T_1+T_2}=\frac{Q_2}{\theta_1+\theta_2} \quad \cdots \quad (17),$$

d. h. der betrachtete Kreisprozefs ist annähernd einem Carnotschen äquivalent, welcher zwischen Temperaturen verläuft, die ihrerseits das arithmetische Mittel zwischen der Anfangs- und Endtemperatur des Heizkörpers bezw. des Kühlkörpers darstellen.

Von dieser Annäherung darf man indessen nur dann Gebrauch machen, so lange die Differenzen der absoluten Temperaturen T_1-T_2 bezw. $\theta_1-\theta_2$ klein gegen die entsprechenden Summen sind. Bei Wärmekraftmaschinen, wo wir es fast immer mit

Heizgasen von anfänglich sehr hohen Temperaturen zu thun haben, ist diese Annahme kaum zulässig, auch wenn ihrer Anwendung auf den Kühlkörper allein nichts im Wege stünde; bei Kühlmaschinen dagegen, in denen sowohl der Heizkörper (gewöhnlich eine Salzlösung), wie auch der Kühlkörper (Wasser) ihre Temperaturen nur um wenige Grade ändern, wird man ohne weiteres von der Annäherung Gebrauch machen können. Die Bedeutung der Näherungsgleichung wird übrigens erheblich dadurch eingeschränkt, dafs — wenigstens für nur einen Heiz- und Kühlkörper — die genaue Rechnung nach Gleichung (11) schon als sehr einfach bezeichnet werden mufs.

10. Praktische Ausführbarkeit des vollkommenen Kreisprozesses.

Dagegen ist wohl noch die Bemerkung von Interesse, dafs es möglich ist, den hier besprochenen Kreisprozefs annähernd mit einer Maschine, in welcher nur Carnotsche Kreisprozesse durchlaufen werden, durchzuführen. Es habe in einem bestimmten Augenblick der Heizkörper die Temperatur T, der Kühlkörper dagegen die Temperatur θ, so wird zwischen diesen beiden Temperaturen ein Elementarkreisprozefs möglich sein nach der Gleichung [siehe (8)]

$$\frac{\Delta Q_1}{T} - \frac{\Delta Q_2}{\theta} = 0.$$

Hierdurch aber haben sich die Temperaturen des Heiz- und Kühlkörpers um die Beträge ΔT bezw. $\Delta\theta$ geändert, so dafs bei einer Wiederholung des Elementarkreisprozesses derselbe zwischen $T - \Delta T$ und $\theta + \Delta\theta$ verläuft, mithin die Gleichung

$$\frac{\Delta Q_1'}{T-\Delta T}-\frac{\Delta Q_2'}{\theta+\Delta\theta}=0$$

erfüllt. Summieren wir alle so entstehenden Gleichungen, so ergibt sich

$$\frac{\Delta Q_1}{T}+\frac{\Delta Q_1'}{T-\Delta T}+\ldots=\frac{\Delta Q_2}{\theta}+\frac{\Delta Q_2'}{\theta+\Delta\theta}+\ldots,$$

worin

$$\Delta Q_1+\Delta Q_1'+\ldots=Q_1,$$
$$\Delta Q_2+\Delta Q_2'+\ldots=Q_2$$

ist. Nehmen wir nun näherungsweise an, dafs die Differenzen ΔQ bezw. ΔT und $\Delta\theta$ unendlich klein gegen die totalen Beträge Q_1, Q_2, sowie die Differenzen T_1-T_2 bezw. $\theta_1-\theta_2$ sind, so können wir unmittelbar zum Integrale übergehen und erhalten so wieder die Gleichung (4).

Diese Darlegung hat eine nicht zu unterschätzende praktische Bedeutung. Wir werden später sehen, dafs die Durchführung von vollkommenen Kreisprozessen mit variabelen Temperaturen des Heiz- und Kühlkörpers, wie wir sie hier entwickelt haben, technisch grofsen Schwierigkeiten begegnet, während für eine gewisse Klasse arbeitender Körper (gesättigte Dämpfe) die Durchführung Carnotscher Kreisprozesse ziemlich einfach ist. Die obige Annäherung weist uns darum auf die Möglichkeit hin, durch eine Reihe von aufeinanderfolgenden Carnotschen Kreisen unsere theoretischen Forderungen annähernd zu erfüllen.

11. Zustandsänderungen des Heiz- und Kühlkörpers bei konstantem Volumen.

Obwohl für praktische Anwendungen nur Zustandsänderungen des Heiz- und Kühlkörpers bei

konstantem Druck in Frage kommen, wollen wir doch auch den Fall solcher Änderungen bei konstantem Volumen untersuchen. Setzen wir dabei voraus, dafs die spezifischen Wärmen der beiden fraglichen Körper für konstante Volumina unabhängig von der Temperatur sind, so erhalten wir Gleichungen von genau derselben Form wie (11) und (11a), deren nochmalige Entwickelung kaum nötig sein dürfte. Da nun aufserdem die spezifische Wärme von Flüssigkeiten für konstantes Volumen sich kaum nennenswert von der für konstanten Druck unterscheidet, die Kühlkörper thermodynamischer Maschinen aber fast durchgehends aus Flüssigkeiten (sog. Kühlwasser) bestehen, so bietet der ganze Prozefs der Wärmeabgabe nichts Neues. Mithin braucht sich unsere Untersuchung lediglich auf den Einflufs der Wärmeaufnahme bei konstantem Volumen des Heizkörpers und zwar auch nur für Wärmekraftmaschinen zu erstrecken. Als Heizkörper setzen wir ein gasförmiges Verbrennungsprodukt voraus, welches dem Mariotte-Gay-Lunacschen Gesetze folgt, und dessen spezifische Wärmen bei konstantem Druck c_1 und konstantem Volumen c' zu einander in dem unveränderlichen Verhältnisse k stehen, also

$$\frac{c_1}{c'} = k \backsim 1{,}4.\ ^{1})$$

---

[1]) Dieser Wert $k = 1{,}4$ bezw. $1 + \frac{2}{5}$ entspricht bekanntlich, wie Boltzmann (Sitzungsberichte der Wiener Akademie Bd. 74 S. 553, vom Jahre 1878) gezeigt hat, Gasen, deren Moleküle Rolationskörper sind, eine Bedingung, welche für zweiatomige Gase ($H_1\ O_1\ N_1$) erfüllt ist. (Siehe auch Kirchhoff »Vorlesungen über math. Physik« IV. Bd. »Theorie der Wärme« Seite 171.)

Tritt hiernach der Heizkörper in den beiden mit einander zu vergleichenden Fällen seiner Zustandsänderung bei konstantem Druck und konstantem Volumen mit derselben Anfangstemperatur T_1 in die Maschine ein, um dieselbe auch mit derselben Endtemperatur T_2 zu verlassen, so ist ohne weiteres klar, dafs wegen $c_1 > c'$ die an den vermittelnden Körper abgegebene Wärme bei konstantem Druck gröfser ausfallen wird, als bei konstantem Volumen.

12. Vergleich der beiden Prozesse.

Damit aber würde die Vergleichung der ökonomischen Koeffizienten, auf welche doch allein die gegenseitige Beurteilung der beiden Prozesse hinausläuft, unmöglich werden. Wir müssen darum auf den Verbrennungsvorgang selbst zurückgreifen, bei dem unter Voraussetzung desselben Brennstoffes und derselben Luftzufuhr stets dieselbe Wärmemenge Q_1 entwickelt wird. Findet die Verbrennung also bei konstantem Volumen statt, so wird der geringeren spezifischen Wärme (d. i. dem Wegfall der zu leistenden äufseren Arbeit) eine höhere Verbrennungstemperatur T' entsprechen gegenüber der Verbrennung bei konstantem Druck. Wir haben also unter Beibehaltung der bisher gebrauchten Buchstaben für die Wärmeentwickelung

$$\left.\begin{array}{lll} \text{bei konstantem Druck} & Q_1 = Hc_1 (T_1 - T_2) \\ \text{» » Volumen} & Q_1 = Hc' (T' - T_2) \end{array}\right\} \quad (18),$$

worin T_2 sowohl die Temperatur, mit der die Luft in den Verbrennungsprozefs eintrat, wie auch die Endtemperatur der ausgenutzten Heizgase bezeichnen soll. Durch Verbindung von (18) folgt aber

$$T' = T_2 + k (T_1 - T_2) \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Setzen wir nun für beide Kreisprozesse genau dasselbe Gewicht K des Kühlkörpers bezogen auf die Zeiteinheit mit derselben spezifischen Wärme c_2 und auch derselben Anfangstemperatur θ_2 voraus, so wird sich eine Endtemperatur ergeben für den

Prozefs bei konstantem Druck

$$\theta_1 = \theta_2 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{Hc_1}{Kc_2}}$$

Prozefs bei konstantem Volumen

$$\theta' = \theta_2 \left(\frac{T'}{T_2}\right)^{\frac{Hc'}{Kc_2}} \quad \ldots \quad (20).$$

Bilden wir mit diesen Werten die ökonomischen Koeffizienten und berücksichtigen noch Gleichung (19), so erhalten wir

für konstanten Druck

$$\frac{AL}{Q_1} = 1 - \frac{Kc_2\theta_2}{Q_1}\left(\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^{\frac{Hc_1}{Kc_2}} - 1\right)$$

für konstantes Volumen

$$\frac{AL'}{Q_1} = 1 - \frac{Kc_2\theta_2}{Q_1}\left(\left[\frac{T_2 + k(T_1 - T_2)}{T_2}\right]^{\frac{Hc'}{Kc_2}} - 1\right) \quad (21).$$

Diese beiden Ausdrücke stimmen nun bis auf die Potenzen innerhalb der Klammern überein, so dafs wir den Vergleich nur auf diese Potenzen auszudehnen haben. Setzen wir nun der Einfachheit halber $\frac{T_1}{T_2} = 1 + Z$, da immer $T_1 > T_2$ ist, weiter $\frac{Hc_1}{Kc_2} = \mu$, so ist $\frac{Hc'}{Kc_2} = \frac{\mu}{k}$, und die beiden Potenzen lauten jetzt

für konstanten Druck $(1+Z)^{\mu}$,

für konstantes Volumen $(1+kZ)^{\frac{\mu}{k}}$.

Da nun $k>1$, so ist immer

$$(1+kZ)<(1+Z)^{k}$$

$$(1+kZ)^{\frac{1}{k}}<(1+Z)$$

$$(1+kZ)^{\frac{\mu}{k}}<(1+Z)^{\mu}$$

d. h. aber

$$\left(\frac{T_2+k\,[T_1-T_2]}{T_2}\right)^{\frac{Hc'}{Kc_2}}<\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{Hc_1}{Kc_2}}$$

und darum ist für alle Werte $T_1>T_2$

$$\frac{A\,L'}{Q_1}>\frac{A\,L}{Q_1},$$

d. h. Arbeitsprozesse, bei denen die Verbrennung und nachherige Wärmeabgabe seitens der Heizgase bei konstantem Volumen erfolgt, ergeben einen höheren ökonomischen Koeffizienten, d. i. einen gröfseren Verwandlungswert der zugeführten Wärme, als solche, bei denen die Verbrennung und Wärmeabgabe bei konstantem Drucke vor sich geht.

Der Grund hierfür ist einfach in der Erzielung erheblich höherer Anfangstemperaturen im ersten Fall gegenüber dem zweiten zu suchen.

Es dürfte zweckmäfsig sein, die bisher gewonnenen Resultate durch ein Zahlenbeispiel zu verdeutlichen, aus dem auch hervorgehen wird, wie weit wir mit unseren praktisch ausgeführten thermodynamischen Maschinen von der hier besprochenen äufsersten Ausnutzung der gebotenen Energie entfernt sind.

Es sei ein Brennstoff gegeben, von dem jedes Kilogramm durch seine Verbindung mit Sauerstoff 7500 W.E. entwickelt. Um die Verbrennung in technisch einfacher Weise durchführen zu können, ist es notwendig, die Luft in einem gewissen Überschusse zuzuführen, sodafs die aus der Verbrennung resultierenden Heizgase beispielsweise ein Gewicht von 20 kg besitzen mögen. Diese Gase sollen nun als ideelle Gase dem Mariotte-Gay-Lunac'schen Gesetze gehorchen, ihre spezifische Wärme sei $c_1 = 0{,}24 =$ Konst. bei konstantem Druck und $c' = 0{,}17 =$ Konst. bei konstantem Volumen, sodass $k = \frac{c_1}{c'} = 1{,}41$ wird. Vor der Verbrennung herrsche nun eine Temperatur von $+ 15^0$ Cels., also absolut 288^0, dann ist die Maximaltemperatur infolge der Verbrennung bei konstantem Druck

$$T_1 = \frac{7500}{20 \cdot 0{,}24} + 288 = 1850^0,$$

bei konstantem Volumen

$$T' = \frac{7500}{20 \cdot 0{,}17} + 288 = 2494^0.$$

Diese Heizgase sollen nun in einem Falle bei konstantem Druck, im andern bei konstantem Volumen solange Wärme an den arbeitenden Körper in einer vollkommenen thermodynamischen Maschine abgeben, bis ihre Temperatur wieder auf $+ 15^0$, also $T_2 = 288^0$, gesunken ist, während gleichzeitig der Maschine $K = 100$ kg Kühlwasser mit einer Anfangstemperatur von $+ 10^0$, also absolut $\theta_2 = 283^0$ zur Verfügung stehen. Dieses Kühlwasser habe eine für konstanten Druck, wie für konstantes Volumen mit grofser Annäherung als gleich zu betrachtende spezifische Wärme von $c_2 = 1$. Dann wird sich dasselbe erwärmen und zwar bei dem Prozefs mit konstantem Druck[1]) auf

$$\theta_1 = 283 \left(\frac{1850}{288}\right)^{\frac{20 \cdot 0{,}24}{100}} = 309{,}^0 43,$$

---

[1]) Es braucht wohl kaum wiederholt zu werden, dafs sich die Bezeichnungen »mit konst. Druck«, »mit konst. Volumen« nur auf die Zustandsänderungen der Heizgase beziehen

mit konstantem Volumen auf

$$\theta' = 283 \left(\frac{2494}{288}\right)^{\frac{20 \cdot 0{,}17}{100}} = 306{,}^{\circ}63,$$

mithin eine Wärmemenge aufnehmen beim Prozefs mit konstantem Druck von

$$Q_2 = 100\ (309{,}43 — 288) = 2643\ \text{W.-E.},$$

mit konstantem Volumen von

$$Q_2' = 100\,(306{,}51 — 283) = 2353\ \text{W.-E.},$$

während die in beiden Fällen gleichzeitig zugeführte Wärme

$$Q_1 = 7500\ \text{W.-E.}$$

war. Damit aber ergibt sich ein ökonomischer Koeffizient für konstantem Druck von

$$\frac{A\,L}{Q_1} = \frac{7500 — 2643}{7500} = 0{,}650$$

für konstantes Volumen von

$$\frac{A\,L'}{Q_1} = \frac{7500 — 2353}{7500} = 0{,}686.$$

Um dieses Ergebnis mit der bisher in der Technik erreichten Ausnutzung der Brennstoffe zu vergleichen, wollen wir die absoluten Arbeitsbeträge noch selbst bestimmen, wozu uns Gleichung (1) dient. Wir erhalten für konstanten Druck

$$L = (7500 — 2643) \cdot 424 = 2\,059\,368\ \text{mkg},$$

für konstantes Volumen

$$L' = (7500 — 2353) \cdot 424 = 2\,182\,328\ \text{mkg}.$$

Da nun einer sogenannten Pferdestärke (d. i. 75 mkg sekundliche Leistung) eine stündliche Arbeit von 270 000 mkg entspricht, so ergibt dies für den hier vorausgesetzten Brennstoffaufwand von 1 kg in einer Stunde

für konst. Druck stündlich 7,62 Pferdestärken,
» » Vol. » 8,08 »

während wir in unseren besten Wärmekraftmaschinen z. Z. kaum 2 Pferdestärken durch stündliche Verbrennung von 1 kg guter Kohle erzielen. Es ist dies wesentlich darin begründet, dafs wir in diesen Maschinen den Verbrennungs-

gasen die Wärme entweder erst bei wesentlich niedereren Temperaturen entziehen, oder die Temperatur der arbeitenden Körper, z. B. des Wasserdampfes, gar nicht bis zu diesen Temperaturen ansteigen lassen können, bei denen theoretisch schon die Arbeitsleistung beginnen sollte.

Ganz anders liegen die Verhältnisse bei der theoretisch vollkommenen Kühlmaschine, für welche die eben entwickelten Gleichungen ebenfalls gelten. Da hier der Heizkörper der kältere ist, so ist Arbeit aufzuwenden, weshalb auch der ökonomische Koeffizient für diese Maschinengattung negativ ausfällt, die zugeführte Wärme aber um das Äquivalent des Arbeitsaufwandes geringer ist, als die vom Kühlkörper hinweggeführte [siehe Gleichung (1)].

Es seien z. B. stündlich $H = 30\,000$ kg einer Salzlösung, deren spezifische Wärme [1]) $c_1 = 0{,}9$ betrage von einer Anfangstemperatur von -2^0, also $T_1 = 271^0$ auf eine Endtemperatur von -5^0, also $T_2 = 268^0$ abzukühlen, wobei $K = 10\,000$ kg Kühlwasser mit der spez. Wärme $c_2 = 1$ und der Zuflufstemperatur $+10^0$, also $\theta_2 = 283^0$ zur Verfügung stehen. Dann erhöht sich die Temperatur des Kühlwassers durch den Prozefs nach Gleichung (11a) auf

$$\theta_1 = 283 \left(\frac{271}{268}\right)^{\frac{30000 \cdot 0{,}9}{10000}} = 291^0{,}63$$

oder $+18^0{,}63$. Weiter ergiebt sich hiermit die vom Kühlwasser aufzunehmende Wärme zu

$$Q_2 = 10\,000\,(291{,}63 - 283) = 86\,300 \text{ W.-E.},$$

während die von der Salzlösung abgegebene

$$Q_1 = 30\,000\,(271 - 268) \cdot 0{,}9 = 81\,000 \text{ W.-E.}$$

beträgt. Hiermit also haben wir einen ökonomischen Koeffizienten von

$$\frac{A\,L}{Q_1} = \frac{81\,000 - 86\,300}{81\,000} = -0{,}0655$$

oder einen Arbeitsaufwand von stündlich

$$L = 5300 \cdot 424 = 2 \cdot 247\,200 \text{ mkg}$$

oder 8,32 Pferdestärken, während man unter den gleichen Verhältnissen in den jetzt gebräuchlichen Kühlmaschinen

[1]) Bei diesem Beispiel unterscheiden wir nicht mehr Zustandsänderungen bei konst. Druck und konst. Volumen.

bester Ausführung rd. 20 Pferdestärken benötigt. Wir sind also auch mit dieser Maschinengattung, wie bei den Wärmekraftmaschinen, noch weit von dem theoretisch erreichbaren Ideale entfernt.

13. Aggregatzustandsänderung des Kühlkörpers.

Wir haben schon früher (Seite 16) gelegentlich der Diskussion der praktischen Durchführbarkeit Carnotscher Kreisprozesse erwähnt, dafs in Wirklichkeit isotherme Zustandsänderungen des Heiz- und Kühlkörpers nur Aggregatzustandsänderungen bei konstantem Druck sein können, welche letztere Bedingung in der Technik stets erfüllt ist. Da man nun in neuester Zeit sich solcher Aggregatzustandsänderungen häufig zur Wärmeaufnahme in sogenannten Verdunstungsapparaten sowohl für Kühl- als auch für Wärmekraftmaschinen bedient, andererseits aber auch die Erzeugung von Eis in diese Kategorie fällt, so erscheint eine Untersuchung des Einflusses derselben auf den Verlauf des Prozesses angebracht.

Wir gehen zu diesem Zwecke wieder von Gleichung (4) aus und setzen zunächst voraus, dafs die Wärmezufuhr, wie früher, durch einen Heizkörper vom Gewichte H mit der unveränderlichen spezifischen Wärme c_1 bei konstantem Drucke erfolgt, dessen Temperatur dabei sich von T_1 auf T_2 erniedrigt. Die Wärmeabfuhr dagegen soll durch Verdampfung bezw. Verdunstung von K kg Kühlwasser ebenfalls bei konstantem Druck erfolgen. Während dieses Vorganges wird die Temperatur θ des Kühlwassers sich nicht ändern, sodafs, wenn r die auf 1 kg bezogene latente Verdampfungswärme bedeutet, das Wärmeelement

$$dQ_2 = r\,dK \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

für alle Teile des Prozesses der Wärmeabgabe unveränderlich bleibt. Andererseits können wir für die Wärmeaufnahme

$$dQ_1 = Hc_1\,dT \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

setzen, und haben so aus Gleichung (4)

$$Hc_1 \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \frac{r}{\theta} \int_{0}^{K} dK = 0 \quad . \quad . \quad . \quad 24)$$

oder durch Integration

$$Hc_1 \lg \frac{T_1}{T_2} = \frac{rK}{\theta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25),$$

worin die Verdampfungswärme r den Dampftabellen [1]) entnommen werden kann (als Funktion von θ). Durch Integration von (22) und (23) erhält man die Wärmemengen selbst, nämlich

$$Q_1 = Hc_1\,(T_1 - T_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$
$$Q_2 = rK \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27),$$

während zur Ermittelung der Arbeit L, wie immer, die Gleichung (1) dient.

Da die Verdampfungswärme für Wasser nun sehr gross ist, bei $+ 10^0$, also $\theta = 283$, z. B. $r = 599{,}55$, so ist zur Wärmeabfuhr in diesem Falle nur eine relativ geringe Wassermenge nötig. Diese Anordnung thermodynamischer Maschinen empfiehlt sich demnach überall da, wo Wasser zur Wärmeabfuhr nur in sehr beschränkter Menge vorhanden ist. Da

[1]) Siehe z. B. die Tabellen im Anhange des 2. Bandes von Zeuners »Technischer Thermodynamik« 1890.

nun für die Wahl der Methode der Wärmeabfuhr nur die Wassermenge selbst maſsgebend ist, so wird die Anwendung der hier behandelten sogenannten Verdunstungskühlung jedenfalls fast überall möglich sein. Es ist darum von Interesse, festzustellen, ob dieselbe theoretisch den Prozess bezw. den ökonomischen Koeffizienten günstig oder ungünstig im Vergleich mit der früher behandelten Kühlung durch Temperaturzunahme des Kühlwassers beeinfluſst. Zu diesem Zwecke müssen wir annehmen, daſs für beide Methoden das Kühlwasser mit derselben Anfangstemperatur, also $\theta = \theta_2$, zur Verfügung steht, und haben dann für den ökonomischen Koeffizienten die beiden entsprechenden Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \frac{AL}{Q_1} &= 1 - \frac{Kc_2(\theta_1 - \theta_2)}{Q_1} \\ \frac{AL'}{Q_1} &= 1 - \frac{K'r}{Q_1} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (28),$$

wo naturgemäſs L' und K' von L und K verschieden sind, während die Wärmezufuhr $Q_1 = Hc_1(T_1 - T_2)$ für beide Methoden dieselbe bleibt. Eliminieren wir die Gröſsen K und K' mit Hilfe von (11) bezw. (25) und setzen noch $\theta = \theta_2$, so haben wir statt (28), wenn wir $\frac{\theta_1}{\theta_2} = y > 1$ einführen,

$$\left.\begin{aligned} \frac{AL}{Q_1} &= 1 - \frac{\theta_2 \cdot Hc_1}{Q_1} \lg n \left(\frac{T_1}{T_2}\right) \frac{(y-1)}{\lg n\, y} \\ \frac{AL'}{Q_1} &= 1 - \frac{\theta_2 Hc_1}{Q_1} \lg n \left(\frac{T_1}{T_2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (29),$$

worin sich das zweite Glied des zweiten Ausdruckes nur durch Wegfall des Faktors $\frac{y-1}{\lg n\, y}$ von dem ent-

sprechenden des ersten Ausdruckes unterscheidet. Wir haben also blofs zu untersuchen, ob dieser Faktor $\gtrless 1$ ist. Nun ist aber bekanntlich

$$e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdot\cdot$$

$$e \cdot y = y + \frac{y}{1} + \frac{y}{1 \cdot 2} + \frac{y}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdot\cdot,$$

also für alle Werte $y > 1$

$$e^y - ey = 1 - y + \frac{y^2 - y}{1 \cdot 2} + \frac{y^3 - y}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots > 0$$

$$e^y > ey$$

$$e^{y-1} > y$$

$$y - 1 > \lg n\, y,$$

mithin

$$\frac{AL}{Q_1} < \frac{AL'}{Q_1},$$

d. h. die Wärmeabfuhr durch Verdunstungskühlung ist bei gleicher Anfangstemperatur günstiger als die Wärmeentziehung mit steigender Temperatur des Kühlwassers.

Wendet man die Methode der Verdunstungskühlung auf das oben durchgerechnete Beispiel einer Kühlmaschine (Seite 30) unter Beibehaltung aller übrigen Werte an, so erhält man für $\theta = 283$ und dementsprechend $r = 599{,}55$ aus (25) eine stündliche Wasserverdunstung von

$$K' = 142 \text{ kg}$$

entsprechend einer Wärmeaufnahme von

$$Q_2' = 85\,120 \text{ W.-E.}$$

Mithin wird der ökonomische Koeffizient in diesem Falle

$$\frac{A\,L'}{Q_1} = \frac{81\,000 - 85\,120}{81\,000} = -0{,}0508 > \frac{A\,L}{Q_1} \quad \text{(S. 28)},$$

während sich der Arbeitsaufwand nur mehr zu 6,47 Pferdestärken ergibt.

14. Aggregatzustandsänderungen des Heizkörpers.

Etwas verwickelter, als die hier für die Aggregatzustandsänderung des Kühlkörpers aufgestellten Gleichungen gestalten sich die auf die Eiserzeugung bezüglichen Formeln. Hierbei ist immer die Aufgabe so gestellt, dafs aus einer bestimmten Wassermenge H kg von einer Anfangstemperatur T_1 Eis von einer Endtemperatur T_2 hergestellt werden soll. Da der ganze Vorgang unter dem konstanten Atmosphärendrucke sich vollzieht, so entspricht demselben eine ganz bestimmte Temperatur der Eisbildung, etwa $T_0 = 273$ (0° Cels.). Wir können demnach den ganzen Vorgang in drei verschiedene Abkühlungsprozesse zerlegen, von denen der erste die Temperaturerniedrigung des Wassers von T_1 auf T_0 mit einem Kühlwasseraufwande von K_1, der zweite die Eisbildung bei der konstanten Temperatur T_0 mit einem Kühlwasseraufwande von K_2 und endlich der dritte die weitere Abkühlung des Eises von T_0 auf T_2 mit einer Kühlwassermenge von K_3 zur Folge hat. Nehmen wir der Kürze halber an, dafs in allen drei Prozessen, welche wir später wieder zu einem einzigen vereinigen, die einzelnen Kühlwassermengen dieselbe Anfangs- und Endtemperatur θ_2 bezw. θ_1 besitzen, nennen wir weiter r_0 die zur Eisbildung von 1 kg Wasser erforderliche Wärmeentziehung (= Schmelzwärme, also $r_0 =$ rd. 80 W.-E.) und $c_0 = 0{,}5$ die spezifische Wärme des Eises, so haben wir den drei Prozessen entsprechend die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} Hc_1 \operatorname{lgn}\left(\frac{T_1}{T_0}\right) &= K_1 c_1 \operatorname{lgn}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) \\ \frac{Hr_0}{T_0} &= K_2 c_1 \operatorname{lgn}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) \\ Hc_0 \operatorname{lgn}\left(\frac{T_0}{T_2}\right) &= K_3 c_1 \operatorname{lgn}\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (30).$$

Addieren wir jetzt diese Gleichungen und führen statt der einzelnen Kühlwassermengen den Gesamtaufwand

$$K = K_1 + K_2 + K_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

ein, so wird

$$\left.\begin{aligned} H\left(c_1 \operatorname{lgn}\left[\frac{T_1}{T_0}\right] + \frac{r_0}{T_0} + c_0 \operatorname{lgn}\left[\frac{T_0}{T_2}\right]\right) \\ = Kc_1 \operatorname{lgn}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Die bei der Abkühlung und Eisbildung von der Maschine aufgenommene Wärme ergibt sich alsdann zu

$$Q_1 = H(c_1 [T_1 - T_0] + r_0 + c_0 [T_0 - T_2]) \quad (33),$$

während die vom Kühlwasser aufgenommene, wie früher

$$Q_2 = Kc_1 (\theta_1 - \theta_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

ist. Zu den drei letzten Gleichungen tritt dann noch (1) zur Bestimmung des Arbeitsaufwandes.

Wird dagegen die Wärme nicht unter Temperatursteigerung von K kg Kühlwasser, sondern durch Verdunstung von K' kg bei der Temperatur θ aufgenommen, so haben wir, wie man leicht erkennt, statt (32) und (34)

$$H\left(c_1 \operatorname{lgn}\left[\frac{T_1}{T_0}\right] + \frac{r_0}{T_0} + c_0 \operatorname{lgn}\left[\frac{T_0}{T_2}\right]\right) = \frac{K'r}{\theta} \quad (32\,a)$$

$$Q_2 = K'r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34\,b),$$

während die beiden andern Gleichungen (1) und (33) unverändert bleiben.

Steht endlich das zur Eisbildung zu verwendende Wasser schon mit der Temperatur 0° d. i. T_0 zur Verfügung, und begnügt man sich damit, auch nur Eis von dieser Temperatur herzustellen, so geht (32 a) über in

$$\frac{Hr_0}{T_0} = \frac{K'r}{\theta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32\,b)$$

oder, da auch (33) sich in

$$Q_1 = Hr_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33\,a)$$

vereinfacht, wegen (34 a)

$$\frac{Q_1}{T_0} = \frac{Q_2}{\theta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32\,c).$$

Dies ist aber wieder die Gleichung eines Carnotschen Prozesses, der hiernach der günstigste für eine reine Eismaschine mit Verdunstungskühlung ist. Es soll hier hervorgehoben werden, dafs dieser Fall der einzige ist, in dem ein Carnotscher Kreisprozefs in der Technik vollberechtigt ist, während für alle anderen Fälle die von uns oben entwickelten Formeln mafsgebend sind. Demnach mufs die vielfach in physikalischen und technischen Schriften zu findende allgemeine Verwendung der Formeln des Carnotschen Kreises als eine irrtümliche bezeichnet werden.

In Anbetracht der Wichtigkeit, welche die künstliche Eiserzeugung besitzt, wollen wir die oben entwickelten allgemeineren Formeln durch ein Zahlenbeispiel erläutern. Es seien stündlich 500 kg Eis von $-10°$ Cels., also $T_2 = 263°$, aus Wasser von $+10°$, also $T_1 = 283°$, herzustellen. Bedienen wir uns dazu einer Maschine mit Verdunstungskühlung,

welche ebenfalls bei $+10^{0}$, also $\theta = 283$, stattfinden soll, so ist nach Gleichung (32a) hierzu eine Wassermenge von

$$K' = \frac{500 \cdot 283}{599{,}55}\left(\lg n \frac{283}{273} + \frac{80}{273} + 0{,}5 \lg n \frac{273}{268}\right) = 82 \text{ kg}$$

nötig, während dem Wasser zur Abkühlung und Eisbildung im ganzen eine Wärme von

$$Q_1 = 500\,[(283 - 273) + 80 + 0{,}5\,(273 - 268)] = 47\,500 \text{ W.-E.}$$

zu entziehen sind. Durch die Verdunstung werden dagegen

$$Q_2 = 82 \cdot 599{,}55 = 49\,143 \text{ W.-E.}$$

gebunden, sodass der Arbeitsaufwand stündlich

$$L = (49\,143 - 47\,500)\,424 = 696\,632 \text{ mkg}$$

oder rd. 2,58 Pferdestärken beträgt.

Etwas ungünstiger stellt sich das Ergebnis, wenn wir die Wärme von Kühlwasser unter Temperaturerhöhung entfernen. Mit einem Aufwande von beispielsweise 10 000 kg Kühlwasser stündlich und derselben Anfangstemperatur $+10^{0}$, also $\theta_2 = 283$, ergibt sich die Endtemperatur aus (32) zu $\theta_1 = 287^{0},97$, und damit wird bei demselben Q_1 die abzuführende Wärme

$$Q_2 = 49\,700 \text{ W.-E.},$$

was einem Arbeitsaufwande von rd. 3,46 Pferdestärken entspricht.

Beide Ergebnisse sind, da es sich in unseren Beispielen immer um theoretisch vollkommene Maschinen handelt, erheblich günstiger als die technisch bisher erzielten Werte.

15. Kombinierte thermodynamische Maschine.

Unsere oben entwickelte Theorie ergab für Kühlmaschinen in Übereinstimmung mit dem zweiten Hauptsatze der Thermodynamik einen Arbeitsaufwand als Kompensation für den Wärmeübergang von einem kälteren Körper nach einem wärmeren, während aus dem um-

gekehrten Wärmeübergang in einer Wärmekraftmaschine ein Arbeitsgewinn resultierte. Setzen wir diese beiden Arbeitsbeträge einander gleich, so heifst dies nichts anderes, als dafs wir die fragliche Kühlmaschine mit einer Wärmekraftmaschine antreiben. Den in dieser kombinierten Maschine sich vollziehenden Gesamtprozefs können wir aber unter Elimination der Arbeit als einen Wärmeübergang von einem kälteren Körper zu einem wärmeren auffassen, der durch einen zweiten, aber umgekehrt verlaufenden Wärmeübergang kompensiert wird.

In der Technik haben wir in den sogenannten Absorptionskühlmaschinen — allerdings höchst unvollkommene — Vertreter solcher Kombinationen, sodafs die Erweiterung unserer Theorie hierauf wohl am Platze sein dürfte.

Dabei wollen wir lediglich annehmen, dafs der Kühlkörper K, welcher zunächst bei konstantem Druck keine Aggregatzustandsänderungen erleiden möge, sowohl die Wärme aus dem Übergang von dem hohen Temperaturniveau, wie auch die aus dem Kühlprozesse enstammende aufnimmt. Wir können demnach K zerlegen in zwei Bestandteile

$$K = K' + K'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35),$$

die aber beide immer gleichzeitig dieselbe Temperatur θ besitzen mögen. Die Anfangs- und Endtemperaturen seien wie immer θ_2 bezw. θ_1; die spez. Wärme dagegen c.

Der warme Heizkörper sei wieder in der Gewichtsmenge Hkg mit der spezifischen Wärme c_1 vorhanden; seine variabele Temperatur werde, des Unterschieds halber, jetzt mit $\mathfrak{T}$, für den Anfang

und das Ende des Prozesses also mit $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ bezeichnet.

Der kalte Heizkörper (d. i. der abzukühlende Körper) möge jetzt in einer Menge S kg gegeben sein, seine Temperatur sei T, bezw. T_1 und T_2, seine spezifische Wärme c_2.

Dann haben wir zunächst die vom warmen Heizkörper in der Maschine abgegebene Wärme

$$Q_1 = Hc_1(\mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36),$$

wovon die Kühlwassermenge K' aufnimmt

$$Q' = K'c(\theta_1 - \theta_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37).$$

Weiterhin gibt der kalte Heizkörper in der Maschine die Wärme

$$Q_2 = Sc_2(T_1 - T_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

ab, und die Kühlwassermenge K'' nimmt gleichzeitig

$$Q'' = K''c(\theta_1 - \theta_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

auf. Da bei dem kombinierten Prozefs eine positive oder negative äufsere Arbeitsleistung nicht auftritt, so mufs hier statt (1) die algebraische Summe aller Wärmemengen verschwinden, d. h. es wird

$$Q_1 - Q' = Q'' - Q_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40).$$

Für die beiden hier vereinigten Prozesse gelten aber die beiden Gleichungen, siehe (11 a)

$$\left(\frac{\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{T}_2}\right)^{Hc_1} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{K'c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{Sc_2} = \left(\frac{\theta}{\theta_2}\right)^{K''c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42),$$

durch deren Multiplikation sich mit Rücksicht auf (35) ergibt

$$\left(\frac{\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{T}_2}\right)^{Hc_1}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{Sc_2}=\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{Kc} \quad . \quad . \quad . \quad (43).$$

Ebenso können wir wegen (35) noch die beiden Wärmemengen Q' und Q'' durch Addition von (37) und (39) vereinigen zu

$$Q=Kc\,(\theta_1-\theta_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

und damit auch statt (40) schreiben

$$Q=Q_1+Q_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45).$$

während für Q_1 und Q_2 die beiden Gleichungen (36) und (38)

$$Q_1=Hc_1\,(\mathfrak{T}_1-\mathfrak{T}_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

$$Q_2=Sc_2\,(T_1-T_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

unverändert bestehen bleiben. Durch die 5 Gleichungen (43) bis (47) ist aber der kombinierte Prozefs vollkommen bestimmt, da die Zahl der Unbekannten für eine verlangte Temperaturerniedrigung von T_1-T_2 bei einer abzukühlenden Masse von S kg ebenfalls 5 beträgt, nämlich Q_2, Q_1, Q, θ und H, wogegen als bekannt die Gröfsen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, T_1, T_2, K, S, c, c_1, c_2 anzusehen sind. Zur Berechnung der Unbekannten eliminiert man zunächst die Wärmemengen durch Zusammenfassung von (44) bis (47) und erhält

$$Hc_1\,(\mathfrak{T}_1-\mathfrak{T}_2)=Kc\,(\theta_1-\theta_1)-Sc_2\,(T_1-T_2) \quad (48).$$

Sodann ergibt sich aus (43)

$$Hc_1(\lg\mathfrak{T}_1-\lg\mathfrak{T}_2)=Kc\,(\lg\theta_1-\lg\theta_2)$$
$$-Sc_2\,(\lg T_1-\lg T_2) \quad . \quad . \quad . \quad (49).$$

Dividiert man noch diese beiden Gleichungen beidseitig durcheinander, so fällt auch H heraus

und es bleibt zur Bestimmung von θ_1, wenn wir noch der Kürze halber

$$\frac{\lg \mathfrak{T}_1 - \lg \mathfrak{T}_2}{\mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_2} = \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

setzen, die Gleichung

$$\varepsilon(\theta_1 - \theta_2) - \lg\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \frac{Sc_2}{Kc}\left\{\varepsilon(T_1 - T_2) - \lg\left(\frac{T_1}{T_2}\right)\right\} \quad (51).$$

Dieselbe ist ihres transzendenten Charakters wegen nur annäherungsweise auflösbar; um eine erste Annäherung zu gewinnen, bedient man sich vorteilhaft für die Gröfsen $\lg\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)$ und $\lg\left(\frac{T_1}{T_2}\right)$ der unter (16) gegebenen Reihen mit Vernachlässigung der höheren Potenzen. Man erhält dann für den ersten Näherungswert von θ_1, die quadratische Gleichung

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon(\theta_1 - \theta_2) - 2\,\frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} \\ &= \frac{Sc_2}{Kc}\left\{\varepsilon(T_1 - T_2) - 2\,\frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2}\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (51\,a)$$

Die Ermittelung der anderen Gröfsen ist, wenn θ_1 bekannt ist, zu einfach, um hier im einzelnen durchgeführt zu werden. Dagegen ist die Frage nach dem ökonomischen Koeffizienten des hier behandelten kombinierten Prozesses von Interesse. Wir definierten denselben bisher immer als den Quotienten aus dem Äquivalent der im Prozefs zur Erscheinung kommenden, entweder positiven oder negativen Arbeit und der zugeführten Wärme. Da nun in unserem Prozesse eine solche Arbeit überhaupt nicht auftrat, so ist diese Definition

hierauf nicht mehr anwendbar. Denken wir uns aber, wie auf Seite 39 den Prozefs wieder in zwei entgegengesetzte Vorgänge zerlegt, so haben wir für jeden derselben einen solchen Koefficienten, also

$$\frac{AL}{Q_1} = \eta_1 \text{ und } \frac{AL}{Q_2} = \eta_2,$$

aus welcher durch Division die Arbeit herausfällt. Wir können also den Gesamteffekt durch den Quotienten

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{Sc_2 (T_1 - T_2)}{Hc_1 (\mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_2)} \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

beurteilen und wollen denselben für unseren Prozefs als ökonomischen Koeffizienten bezeichnen. Es steht natürlich gar nichts im Wege, statt dessen auch den reziproken Wert so zu definieren.

Wesentlich einfacher gestalten sich die Formeln für den kombinierten Kreisprozefs, wenn wir die Temperaturzunahme des Kühlkörpers durch eine Aggregatzustandsänderung (Verdunstung) bei konstanter Temperatur θ ersetzen. Bedienen wir uns, wie früher, wieder der Verdunstung von K kg Wasser, deren Verdampfungswärme für θ mit r bezeichnet werden möge, so haben wir, wie man leicht erkennt, statt (43)

$$Hc_1 \lg n \left(\frac{\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{T}_2}\right) + Sc_2 \lg n \left(\frac{T_1}{T_2}\right) = \frac{Kr}{\theta} \quad . \quad (53),$$

sowie statt (44)

$$Q = Kr \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54),$$

und endlich statt (48)

$$Hc_1 (\mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_2) = Kr - Sc_2 (T_1 - T_2) \quad . \quad (55).$$

Eliminirt man aus (53) und (55) die Gröfse H, so bleibt zur Bestimmung der in diesem Falle unbekannten Verdunstungsmenge K mit Rücksicht auf die Abkürzung (50) die Gleichung

$$Kr\left(\varepsilon - \frac{1}{\theta}\right) = Sc_2\left\{\varepsilon(T_1 - T_2) - \lg\left(\frac{T_1}{T_2}\right)\right\} \quad (56),$$

wodurch mit (54), (46) und (47) der Prozefs wiederum vollständig bestimmt ist.

Wir wollen zum Schlufs dieser allgemeinen Untersuchungen auch den kombinierten Prozefs in seinen beiden Variationen durch eine Zahlenrechnung verdeutlichen, um so einen Vergleich mit den bisherigen Leistungen der Technik zu erhalten.

Es seien, wie schon früher, stündlich $S = 30\,000$ kg Salzlösung (spez. Wärme = 0,9) von einer Anfangstemperatur -2^0, also $T_1 = 271^0$, auf eine Endtemperatur von -5^0, oder $T_2 = 268^0$, in einer kombinierten thermodynamischen Maschine abzukühlen, welcher die hierzu nötige Kompensationswärme in Heizgasen mit einer Maximaltemperatur von 1200^0 oder $\mathfrak{T}_1 = 1473^0$ zugeführt wird. Diese Heizgase sollen mit einer Endtemperatur von 200^0, oder $\mathfrak{T}_2 = 473$, entlassen werden, die totale der Maschine zugeführte Wärme aber von einer Kühlwassermenge von $K = 20\,000$ kg stündlich mit einer Anfangstemperatur von $+10^0$, also $\theta_2 = 283$, aufgenommen und entfernt werden.

Mit diesen Werten folgt zunächst aus (50)

$$\varepsilon = \frac{\lg 1473 - \lg 473}{1473 - 473} = 0{,}001136,$$

sowie aus (51) durch Näherungsmethoden

$$\theta_1 = 287^0{,}4.$$

Das Kühlwasser hat hiernach eine Wärmemenge von

$$Q = 20\,000\,(287{,}4 - 283) = 88\,000 \text{ W.-E.}$$

aufgenommen, während die Kälteleistung

$$Q_2 = 30\,000 \cdot 09\,(271 - 268) = 81\,000 \text{ W.-E.}$$

beträgt. Mithin entfällt auf die Heizgase eine Wärmezufuhr von nur

$$Q_1 = Q - Q_2 = 7000 \text{ W.-E.}$$

stündlich, was bei einer spezifischen Wärme derselben von 0,25 einer Menge von stündlich $H = 28$ kg entspricht. Rechnet man beiläufig 18 kg Luft auf 1 kg mittelguter Kohle, so wären zur Erzielung der obigen Kälteleistung hiervon ungefähr 1,5 kg nötig.

Der ökonomische Koeffizient wird endlich

$$\frac{Q_2}{Q_1} = 11{,}57.$$

Noch etwas günstiger stellt sich das Ergebnis, wenn wir zur Wärmeabfuhr eine Verdunstungskühlung anwenden. Es sei die hierfür konstante Temperatur $\theta = 283 = \theta_2$, und dementsprechend die Verdampfungswärme $r = 599{,}55$, dann folgt aus (56) eine Wassermenge von

$$K = 145 \text{ kg}$$

stündlich, entsprechend einer Wärmeabfuhr von

$$Q = 86\,942 \text{ W.-E.}$$

Da die anderen Werte des vorigen Beispiels auch hier gelten sollen, so haben wir eine Wärmezufuhr durch die Heizgase von

$$Q_1 = Q - Q_2 = 5942 \text{ W.-E.}$$

und damit unter den obigen Voraussetzungen rd. $H = 24$ kg oder 1,2 kg Kohlenaufwand.

Zur Erzielung einer Kälteleistung von stündlich 81 000 W.-E. unter der hier gemachten Voraussetzung benötigen also unsere besten Kühlanlagen einen gleichzeitigen Kohlenaufwand von mindestens 20 kg, wiederum ein Beweis, dafs wir mit unseren praktischen Ausführungen noch weit von dem theoretischen Ideale[1]) entfernt sind.

---

[1]) Die Theorie der kombinierten Maschine habe ich, wenn auch in etwas anderem Zusammenhange in einem kleinen Aufsatze »Die Ausnützung der Brennstoffe in den Kühlmaschinen« in der »Zeitschrift für die gesamte Kälteindustrie« 1894, S. 28 entwickelt.

Es sei noch erwähnt, dafs es keine Schwierigkeit bietet, auch den Prozefs der Eiserzeugung mit der kombinierten Maschine durchzuführen. Die hierfür gültigen Formeln ergeben sich einfach durch Modifikation der rechten Seite in (51) und (56) mit Rücksicht auf die früher entwickelten Gleichungen (32) und (32a).

III.

Spezielle Theorie theoretisch vollkommener thermodynamischer Maschinen.

16. Zustandsänderungen des arbeitenden Körpers.

Nachdem wir im Eingang unseres vorigen Abschnittes den Nachweis geliefert haben, dafs die Eigenschaften des in einer theoretisch vollkommenen Maschine arbeitenden Körpers auf die Energieumwandlung keinen Einflufs ausübten, konnten wir uns zunächst mit der Diskussion der bei den einzelnen Hauptgattungen solcher Maschinen (Wärmekraftmaschinen, Kühlmaschinen und kombinierten Maschinen) verschiedenen Zustandsänderungen der Heiz- und Kühlkörper begnügen. Damit aber waren alle Untersuchungen eliminiert, welche die praktische Lösung des Problemes der theoretisch vollkommenen Maschine betrafen und welche ohne Zweifel an Bedeutung der allgemeinen Feststellung der Grenzwerte der thermodynamischen Energieumwandlung nicht nachstehen.

Da nun die praktische Lösung in innigem Zusammenhange mit dem in der Maschine zu voll-

ziehenden Kreisprozefs steht, dieser aber bei gleichen Energieumsätzen und identischen Temperaturvariationen auch noch durch die jeweiligen Pressungen bezw. Volumina des arbeitenden Körpers bedingt ist, so resultiert aus der Willkürlichkeit des letzteren eine unbegrenzte Mannigfaltigkeit verschiedener Maschinenordnungen (oder Mechanismen). Diese Mannigfaltigkeit wird indessen schon erheblich eingeschränkt durch die Überlegung, dafs unter allen Umständen durch den vermittelnden Körper, auf die Zeiteinheit bezogen, ziemlich beträchtliche Arbeitsbeträge zu leisten oder aufzunehmen sind, je nachdem wir es mit einer Wärmekraft- oder Kühlmaschine zu thun haben. Solche äufsere Arbeiten sind nun im allgemeinen mit gleichzeitigen Änderungen des Volumens und des Druckes des den Kreisprozefs vollziehenden arbeitenden Körpers verbunden, so zwar, dafs, wenn wir die augenblickliche Pressung (in Kilogramm auf das Quadratmeter, kg/qm ausgedrückt) mit p, das Volumen (in Kubikmeter, cbm ausgedrückt) mit V bezeichnen, die äufsere Arbeit L mkg sich aus der Gleichung

$$L = \int_{V_2}^{V_2} p dV \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

ergibt. Hieraus geht hervor, dafs bei einer von vornherein gegebenen Arbeit L die Drücke p um so höher ausfallen, je geringer die gleichzeitigen Volumänderungen sind, und insbesondere bei festen und flüssigen Körpern für nur einigermafsen beträchtliche Werte von L zu einer Höhe ansteigen, welche eine dauernde praktische Anwendung vollkommen ausschliefst.

17. Beschränkung auf elastische Flüssigkeiten.

Dann aber bleiben uns nur mehr die elastischen Flüssigkeiten[1]) als arbeitende Körper übrig, und mit diesen allein wollen wir uns darum in den nachfolgenden Untersuchungen beschäftigen.

Unsere Aufgabe besteht nun zunächst darin, die Zustandsänderungen der in der vollkommenen thermodynamischen Maschine arbeitenden elastischen Flüssigkeit (rechnerisch) festzustellen und daraus ein Schema für den Mechanismus der Maschine selbst herzuleiten. Die Zustandsänderungen zerfallen aber in Expansions- und Kompressionsprozesse, deren spezieller Verlauf durch den während derselben stattfindenden Wärmeaustausch mit dem Heiz- bezw. Kühlkörper gegeben sein wird. Hierfür ist nun einfach nach dem ersten Abschnitte die für die theoretische Vollkommenheit des Kreisprozesses notwendige Bedingung maſsgebend, daſs der arbeitende Körper in jedem Augenblicke dieselbe Temperatur besitzen muſs, wie der mit ihm gerade in Berührung befindliche Heiz- oder Kühlkörper, wodurch ja auch eine gleichzeitige Berührung mit diesen beiden Körpern ausgeschlossen ist. Ist also die spezifische Wärme des mit dem Gewichte von H kg vorhandenen Heizkörpers c_1 (wobei wir von jetzt ab nur mehr Zustandsänderungen desselben bei konstantem Druck voraussetzen wollen) seine Temperatur in dem fraglichen Augenblicke T, so nimmt die elastische Flüssigkeit

---

[1]) Tropfbare Flüſsigkeiten dürfen ihrer sehr geringen Keimpressibilität praktisch als ganz unelastische Körpes aufgefaſst werden.

in einem Zeitelemente die Wärmemenge [siehe Gleichung (12)]

$$dQ_1 = Hc_1\,dT \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

auf. Hierin ist dQ_1, wenn wir den Verlauf der Zustandsänderung des arbeitenden Körpers in dieser Periode bestimmen wollen, als Funktion der für diesen maſsgebenden Drücke und Volumina bezw. Temperaturen einzuführen. Da nun mit dieser Wärmeaufnahme nach Voraussetzung (der gleichen Temperaturen mit dem Heizkörper) im allgemeinen eine Temperaturabnahme von T_1 auf T_2 verbunden sein soll, so muſs die elastische Flüssigkeit hierbei Arbeit leisten, d. h. nach aufsen abgeben, was aber wiederum nur durch eine Expansion möglich ist.

Umgekehrt haben wir während der Berührung mit dem Kühlkörper eine Wärmeabgabe, die sich aus

$$dQ_2 = Kc_2 d\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

berechnet und folglich mit einer Temperaturzunahme von θ_2 auf θ_1 im allgemeinen zusammenfällt. Dies erfordert aber eine Einleitung von äufserer Arbeit, also eine Kompression des arbeitenden Körpers.

Aufserdem aber haben wir noch die adiabatischen Zustandsänderungen des arbeitenden Körpers zwischen den Temperaturen T_2 und θ_2 einerseits und θ_1 und T_1 andererseits, von denen die erstere sich an die oben betrachtete Expansion, die zweite an die Kompression anschliefst. Ist nun, wie bei Wärmekraftmaschinen ausnahmslos angenommen werden darf, $T_2 > \theta_2$, $T_1 > \theta_1$, so wird der erstere Vorgang wieder

eine Expansion, der zweite dagegen eine adiabatische Kompression sein müssen, während für den Fall der Kältemaschinen, wo $T_2 < \theta_2$, $T_1 < \theta_1$ sich ergibt, diese Prozesse umgekehrt verlaufen.

18. Diagramm der Druckkurven.

Alle diese Zustandsänderungen und mit ihnen der gesamte Kreisprozefs lassen sich am zweckmäfsigsten durch ein Diagramm veranschaulichen, welches die sogenannten Druckkurven (d. h. den geometrischen Zusammenhang der als Abcissen aufgetragenen Volumina mit den als Ordinaten dargestellten Pressungen) aneinandergereiht enthält. Wie aus Fig. 1 und 2 ersichtlich, fallen diese Diagramme verschieden aus, je nachdem $T_1 \gtrless \theta_1$ und $T_2 \gtrless \theta_2$ ist, d. h. je nachdem wir es mit einer Wärmekraft- oder einer Kühlmaschine zu thun haben.

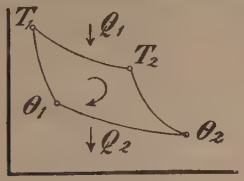


Fig. 1.

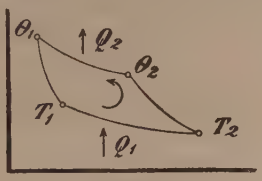


Fig. 2.

Geben wir dann noch die Richtung, in welcher der Gesamtprozefs von dem arbeitenden Körper durchlaufen wird, durch Pfeile an und rechnen die Arbeit, die nach Gleichung (57) durch den Inhalt des geschlossenen Kurvenzuges gemessen wird, positiv, wenn der Kreisprozefs sich in der Richtung des Uhrzeigers vollzieht, so ergibt sich aus diesen Darstellungen unmittelbar, dafs die Wärmekraftmaschinen einen Arbeitsgewinn liefern, die Kühlmaschinen dagegen einen Arbeitsaufwand

erfordern. Um auch die mit dem Kreisprozefs verbundene Wärmebewegung im Diagramm anzudeuten, ist es nur nötig, an der Aufsenseite der betreffenden Phasen Pfeile mit der Bezeichnung der zum Austausch gelangenden Wärmemengen Q_1 oder Q_2 anzubringen, deren Richtung in Bezug auf den Kreisprozefs sofort andeutet, ob die Wärme dem arbeitenden Körper zugeführt oder entzogen wird. Diejenigen Phasen des Prozesses, bei denen solche Pfeile nicht vorhanden sind, stellen dann unmittelbar die adiabatischen Zustandsänderungen dar.

Weiter lehren diese Diagramme, dafs der Kreisprozefs einer theoretisch vollkommenen thermodynamischen Maschine immer aus zwei hintereinander verlaufenden Kompressions-, sowie zwei sich daran anschliefsenden Expansionsprozessen zusammensetzt, und dafs die vier charakteristischen Temperaturen T_1 T_2 θ_2 θ_1 den Zuständen des Körpers an den vier Ecken des Diagrammes entsprechen.

19. Schema der theoretisch vollkommenen Maschine.

Nunmehr bietet die Aufstellung eines Schemas der Vorrichtung oder Maschine, in welcher der beschriebene Vorgang durchgeführt werden soll, keine Schwierigkeit mehr. Wir sind gewohnt, Kompressions- und Expansionsprozesse elastischer Flüssigkeiten in sogenannten Cylindern sich abspielen zu lassen, in denen Kolben (oder Stempel) axial beweglich sind. Die hin- und hergehende Bewegung wird alsdann auf eine Welle übertragen, auf welcher Schwungmassen sitzen; diese übernehmen die Ausgleichung der Arbeiten und bewirken, dafs — wenigstens annähernd —

der Druck der Flüssigkeit im Innern der Cylinder dem auf den Kolben von aufsen her wirkenden Drucke gleich ist. Diese Bemerkung ist darum nötig, weil der Gleichgewichtszustand der eingeschlossenen Flüssigkeit eine der Grundbedingungen für die Umkehrbarkeit ihrer Zustandsänderungen bildet. Die in den einzelnen Cylindern sich abspielenden Prozesse erhalten wir nun, wie Fig. 3 andeutet, aus dem Diagramm, indem wir durch die Eckpunkte Parallelen

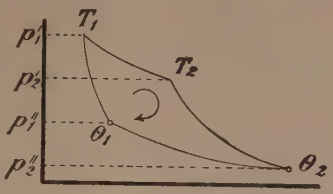


Fig. 3.

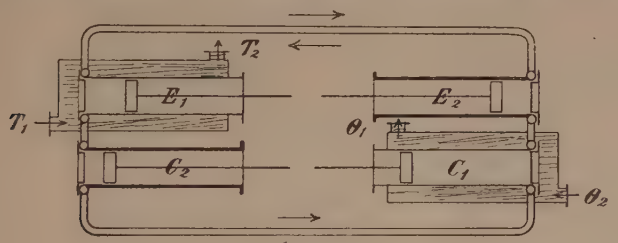


Fig. 4.

zur Abscissenaxe, d. i. Linien konstanten Druckes, legen, welche anzeigen, mit welchen Pressungen p_1' p_2' p_2'' p_1'' der arbeitende Körper in die einzelnen Cylinder eintritt, bezw. dieselben verläfst. Die Zahl dieser Cylinder entspricht aber den vier verschiedenen Zustandsänderungen, sodafs wir das in Fig. 4 dargestellte Schema erhalten, welches nach dem Vorstehenden wohl keiner weiteren Erläuterung bedarf. Die Cylinder selbst wollen wir der Kürze halber von jetzt ab mit E_1 E_2 C_1 C_2 bezeichnen, so zwar, dafs für Wärmekraftmaschinen

in E_1 sich die Expansion von T_1 auf T_2,
„ E_2 „ „ „ „ T_2 „ θ_2 (adiabatisch),
„ C_1 „ „ Kompression von θ_2 auf θ_1
„ C_2 „ „ „ „ θ_1 „ T_1 (adiabatisch),

und in Kühlmaschinen

in C_1 sich die Kompression von θ_2 auf θ_1
„ E_2 „ „ Expansion „ θ_1 „ T_1 (adiabatisch),
„ E_1 „ „ „ „ T_1 „ T_2
„ C_2 „ „ Kompression „ T_2 „ θ_2 (adiabatisch)

vollzieht.

In diesem Schema erscheint den obigen Ausführungen entsprechend der Expansionscylinder[1]) E_1 umgeben mit dem Heizkörper, der Kompressionscylinder[1]) C_1 mit dem Kühlkörper, während die beiden anderen Cylinder, in denen adiabatische Prozesse verlaufen, durch starke Wandlinien ausgezeichnet sind. Übereinstimmend mit den Diagrammen Fig. 1 und 2 stellt dieses Schema[2]), wenn es vom arbeitenden Körper in der Richtung des Uhrzeigers (äufsere Pfeile) durchlaufen wird, eine Wärmekraftmaschine, für die umgekehrte Richtung (innere Pfeile) dagegen eine Kühlmaschine dar. Die auf die einzelnen Cylinder

---

[1]) Die Wandungen dieser Cylinder sind als vollkommen wärmedurchlässig vorausgesetzt.

[2]) Dieses Schema veröffentlichte ich zuerst in einer Arbeit »Studien über den günstigsten Arbeitsprozefs thermodynamischer Maschinen«, Civilingenieur 1893, XXXIX. Bd. 2. Heft, jedoch ohne dasselbe rechnerisch exakt begründen zu können. Auch der Nachweis, den ich für die Berechtigung derselben in meiner schon angeführten weiteren Abhandlung, Zeitschrift d. Vereins deutscher Ingenieure 1894, Heft 3, führte, wird von der oben gegebenen Begründung sowohl durch Allgemeinheit, wie durch Strenge überholt.

entfallenden positiven und negativen Arbeitsbeträge ergeben sich sofort aus der Zerlegung Fig. 3; es sind dies, wie man leicht erkennt, nichts anderes als die sogenannten Indikatordiagramme der Cylinder. Aus diesen Diagrammen folgen dann noch die Hubvolumina, d. h. die von den Kolben in jedem Cylinder in der gleichen Zeit durchstrichenen Räume, deren Maſsstab die in Fig. 3 eingetragenen Horizontalen von der Ordinatenaxe bis zu den entsprechenden Eckpunkten des Diagrammes bilden.

Dem soeben aufgestellten Schema der vollkommenen thermodynamischen Maschine liegt nur die Voraussetzung zu Grunde, daſs der darin arbeitende Körper eine elastische Flüssigkeit sein soll. Eine solche kann aber wiederum ein Gas oder ein Dampf[1]) sein, so daſs die thermodyna-

[1]) Diese Trennung erscheint vielleicht angesichts der Forschungen von Andrews, van der Waals u. A. über die Kontinuität der verschiedenen Aggregatzustände als nicht nicht mehr gerechtfertigt, zumal da die van der Waal'schen Zustandsgleichungen nicht nur den gas- und dampfförmigen, sondesn auch noch den tropfbar flüssigen Zustand eines Körpers umfassen. Indessen führen diese Gleichungen, deren Herleitung eine vollständige Homogenität der Körper zur Voraussetzung haben, unter gewissen Umständen auf labile Gleichgewichtszustände, die in Wirklichkeit nicht dauernd bestehen können und immer eine Trennung der Körper in Bestandteile von verschiedenen Aggregatzuständen zur Folge haben. Obgleich es nun gelungen ist, auch diese Zerlegung auf Grund der Zustandsgleichung rechnerisch zu behandeln, so ergeben sich doch hieraus so verwickelte und aufserdem nicht einmal in geschlossener Form darstellbare Gleichungen, daſs deren Verwendung für unsere Zwecke aussichtslos sein dürfte. Andererseits schliefst sich die getrennte Behandlung der Gase und Dämpfe innerhalb bestimmter Grenzen so

mischen Maschinen in Gas-, oder nach der gebräuchlicheren Ausdrucksweise in Luft- und Dampfmaschinen zerfallen. Je nachdem dieselben dem Zwecke der Arbeitsgewinnung oder der Abkühlung bezw. Kälteerzeugung dienen, bezeichnet man sie als Heifsluft- und Kaltluftmaschinen bezw. Heifsdampf- und Kaltdampfmaschinen, die sich, wie schon der Name andeutet, aufser der Richtung, in welcher der Kreisprozefs durchlaufen wird, nur durch die darin auftretenden Temperaturen unterscheiden. Die Zustandsänderungen selbst aber lassen sich für beide Zwecke durch dieselben Formeln darstellen, die nur für Gase bezw. Luft und Dämpfe verschieden ausfallen. Deshalb wollen wir auch in der nachstehenden Behandlung zunächst an der Unterscheidung zwischen Luft- und Dampfmaschinen festhalten und entwickeln.

20. Die Theorie der theoretisch vollkommenen Luftmaschine.

Der in derselben arbeitende Körper sei allgemein ein sogenanntes ideelles Gas, welches dem Mariotte-Gay-Lunacschen Gesetz

$$pv = RT \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

gehorcht. Hierin ist die Temperatur wieder absolut zu verstehen, der Druck p in kg auf das qm und das spezifische Volumen (d. i. von 1 kg des Gases) in cbm einzusetzen, während R eine Konstante bedeutet (für atmosphärische Luft $R = 29{,}27$). Durch Differentiation geht (60) über in

$$p\,dv + v\,dp = R\,dT \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61).$$

befriedigend an die Erfahrung an, dafs wir wohl berechtigt sind, sie für unsere Untersuchungen beizubehalten.

Denken wir uns jetzt den Kreisprozefs mit G kg (in der Zeiteinheit, z. B. Stunde) Luft durchgeführt, und teilen dieser Menge die unendlich kleine Wärme dQ mit, so wird sich im allgemeinen nicht nur die Temperatur um dT erhöhen, sondern auch eine Arbeit geleistet werden, so zwar, dafs[1])

$$dQ = G\,(c_v\,dT + A\,p\,dv) \quad . \quad . \quad . \quad (62),$$

worin c_v die spezifische Wärme der Luft bei konstantem Volumen ($c_v = 0{,}1685$) und A wie früher die Äquivalentzahl zwischen Wärme und Arbeit bedeuten. Führt man aufserdem noch die spezifische Wärme für konstanten Druck c_p ein (für Luft = 0,2377) und berücksichtigt, dafs

$$\frac{c_p}{c_v} = k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63),$$

sowie[2])

$$c_v\,(k-1) = A\,R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

ist, so erhält man aus den beiden Differentialgleichungen (61) und (62) durch Elimination von dT

$$dQ_i = G\,\frac{A}{k-1}\,(v\,dp + k\,p\,dv) \quad . \quad . \quad (65).$$

Für adiabatische Zustandsänderungen ist nun $dQ = 0$, somit

$$v\,dp + k\,p\,dv = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66),$$

woraus sich durch Integration

$$p\,v^k = \text{Konst.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

---

[1]) Die Ableitung dieser Gleichung siehe u. a. bei Clausius, Mechanische Wärmetheorie Bd. I. S. 48, oder Zeuner, Technische Thermodynamik Bd. I. S. 127.

[2]) Clausius, Zeuner a. a. O.

ergibt. In unserem Kreisprozefs (siehe Fig. 3) finden nun solche adiabatische Zustandsänderungen zwischen den Temperaturen T_1 und θ_1, sowie T_2 und θ_2 statt.

Es möge nun der Temperatur

T_1 die Pressung p_1' sowie das Volumen v_1',
θ_1 » » p_1'' » » » v_1'',
θ_2 » » p_2'' » » » v_2'',
T_2 » » p_2' » » » v_2'

entsprechen, dann können wir für die beiden adiabatischen Zustandsänderungen auch schreiben

$$\frac{p_1'}{p_1''} = \left(\frac{v_1''}{v_1'}\right)^k \text{ oder wegen (60) } \frac{p_1'}{p_1''} = \left(\frac{T_1}{\theta_1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (68),$$

$$\frac{p_2'}{p_2''} = \left(\frac{v_2''}{v_2'}\right)^k \quad » \quad » \quad » \quad \frac{p_2'}{p_2''} = \left(\frac{T_2}{\theta_2}\right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (69).$$

Auch die beiden übrigen Zustandsänderungen lassen sich ohne weiteres mit Hilfe der Gleichungen (58) und (59) aus (65) bestimmen. Wir erhalten so zunächst

$$\left.\begin{aligned} dQ_1 &= Hc_1\,dT \text{ oder wegen (60) } dQ_1 \\ &= \frac{Hc_1}{R}(p\,dv + v\,dp) \end{aligned}\right\} \quad (70),$$

$$\left.\begin{aligned} dQ_2 &= Kc_2\,d\theta \text{ oder wegen (60) } dQ_2 \\ &= \frac{Kc_2}{R}(p\,dv + v\,dp) \end{aligned}\right\} \quad (71).$$

Setzen wir diese Differentiale in (65) ein und schreiben noch abkürzungsweise

$$\frac{c_1\frac{H}{G} + c_p}{c_1\frac{H}{G} + c_v} = m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72),$$

$$\frac{c_2 \frac{K}{G} + c_p}{c_2 \frac{K}{G} + c_v} = n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73),$$

so erhalten wir

$$\frac{dp}{p} + m \frac{dv}{v} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74),$$

$$\frac{dp}{p} + n \frac{dv}{v} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75),$$

oder nach Integration zwischen den diesen Vorgängen entsprechenden Grenzen

$$\frac{p_1'}{p_2'} = \left(\frac{v_2'}{v_1'}\right)^m \text{ oder wegen (60)} \frac{p_1'}{p_2'} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{m}{m-1}} \quad (76),$$

$$\frac{p_2''}{p_1''} = \left(\frac{v_1''}{v_2''}\right)^n \text{ oder wegen (60)} \frac{p_2''}{p_1''} = \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^{\frac{m}{n-1}} \quad (77).$$

Die vier Gleichungen (68), (69), (76) und (77) können nun ohne weiteres so mit einander multipliziert werden, dafs die Pressungen p sämtlich herausfallen. Dann bleibt

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{m}{m-1} - \frac{k}{k-1}} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{\frac{n}{n-1} - \frac{k}{k-1}} \quad . \quad . \quad (78).$$

Darin ist aber nach (72) und (73)

$$\left.\begin{aligned} \frac{m}{m-1} - \frac{k}{k-1} &= \frac{c_1 \frac{H}{G} + c_p}{c_1 \frac{H}{G} + c_v} - \frac{c_p}{c_p - c_v} \\ &= c_1 \frac{H}{G} \cdot \frac{1}{c_p - c_v} \end{aligned}\right\} . \quad (79),$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{n}{n-1}-\frac{k}{k-1}&=\frac{c_2\frac{K}{G}+c_p}{c_2\frac{K}{G}+c_v}-\frac{c_p}{c_p-c_v}\\&=c_2\frac{K}{G}\cdot\frac{1}{c_p-c_v}\end{aligned}\right\}\ .\ (80),$$

so daſs wir statt (78) schreiben können

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{Hc_1}=\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{Kc_2}\quad .\ .\ .\ .\ (81).$$

Dies ist aber dieselbe Gleichung, auf welche wir auch bei unseren allgemeinen Betrachtungen unter (11) stieſsen. Beiden Herleitungen, von denen die frühere ohne, die jetzige dagegen mit Rücksichtnahme auf den arbeitenden Körper durchgeführt ist, liegt die gemeinsame Annahme unveränderlicher spezifischer Wärmen zu Grunde. Diese Voraussetzung hatten wir früher schon für den Heiz- und Kühlkörper gemacht und haben sie auch bei der obenstehenden Rechnung der Einfachheit halber auf die dem arbeitenden Körper eigentümlichen Gröſsen c_p und c_v ausgedehnt. Zur Herleitung von (81) allein wäre dies, wie ja die frühere Rechnung gezeigt hat, nicht notwendig gewesen.

Während nun die für den Kreisprozeſs charakteristischen Temperaturen mit den Wärmemengen Q_1 und Q_2, sowie der dabei auftretenden positiven oder negativen mechanischen Arbeit L und den als gegeben zu betrachtenden Quantitäten H und K des Heiz- und Kühlkörpers durch die im ersten Abschnitt entwickelten allgemeinen Gleichungen in eindeutigem Zusammenhange stehen, so kann der Kreisprozeſs des arbeitenden Körpers auf unendlich verschiedene Weise durchlaufen werden. Derselbe

ist nämlich erst vollständig bestimmt durch die Kenntnis der vier Pressungen p und den Verlauf der beiden Druckkurven nach Gleichung (76) und (77). Die hierin auftretenden Exponenten m und n sind aber nach (72) und (73) von dem Gewichte G des arbeitenden Körpers abhängig, welches sonach ganz willkürlich gewählt werden kann.

Weiterhin enthalten die 4 Gleichungen (68), (69), (76) und (77), welche überdies durch die Gleichung (81) mit einander verknüpft sind, nur die Verhältnisse der einzelnen Pressungen, so dafs dieselben nicht absolut daraus ermittelt werden können. Die Aufgabe wird erst bestimmt durch die — ganz willkürliche — Wahl eines dieser Drucke. Hiernach haben wir den Satz: In einer vollkommenen thermodynamischen Maschine kann ein Wärmeübergang von einem Körper nach einem andern bei vollständig gegebenen Temperaturen durch ein vollkommenes Gas auf zwei mal unendlich verschiedene Arren vermittelt werden, wobei immer dieselben positiven oder negativen totalen Arbeitsleistungen auftreten.

Statt des Gewichtes G kann man natürlich auch einen der Exponenten m oder n willkürlich ansetzen und daraus G bestimmen. So ergibt sich z. B. für $m = n = 1$, d. i. für isothermischen Verlauf der oberen und unteren Druckkurve (wodurch der Prozefs zu einem Carnotschen wird),

$$G = 0 \text{ oder auch } H = \infty = K,$$

während für $m = n = K$, d. i. adiabatischen Verlauf,

$$G = \infty \text{ oder } H = 0 = K$$

werden müfste.[1])

[1] Daraus folgt übrigens, dafs $1 < m\,(n) < k$ sein mufs.

21. Berechnung der Cylindervolumina.

Zur praktischen Durchführung des durch die erwähnten Annahmen eindeutig bestimmten Kreisprozesses bedienen wir uns des in Fig. 4 dargestellten Schemas, dessen Dimensionen vollständig durch die Volumina der einzelnen Cylinder gegeben sind. Diese Volumina aber können wir mit Hilfe der Gleichung (60) berechnen. Berücksichtigt man nämlich, dafs das Volumen V der Gewichtsmenge G durch

$$V = G\,v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (82)$$

gegeben ist, so haben wir für die den

Pressungen	sowie den Temperaturen	entsprechenden Volumina
p_1'	T_1	V_1'
p_1''	θ_1	V_1''
p_2''	θ_2	V_2''
p_2'	T_2	V_2'

die aus (60) hervorgehenden Beziehungen

$$\frac{p_1' V_1'}{T_1} = \frac{p_1'' V_1''}{\theta_1} = \frac{p_2'' V_2''}{\theta_2} = \frac{p_2' V_2'}{T_2} = R.G \quad (83).$$

Wie aus dem Diagramm Fig. 3 hervorgeht, stellen diese Volumina V nicht durchgängig die Inhalte der einzelnen Cylinder dar, während andrerseits die beiden Cylinder, in denen der arbeitende Körper wenigstens einmal die niederste Temperatur erreicht, ein und dasselbe Volumen, welches durch diese Temperatur und die zugehörige Pressung aus (83) bestimmt ist, besitzen. Das für die theoretische Dimensionierung der Maschine irrelevante Volumen ist nach Diagramm Fig. 3 immer das kleinste, welches der Maximaltemperatur entpricht.

Eliminiert man aus (83) die Pressungen mit Hilfe der Gleichungen (68), (69), (76) und (77), so erhält man die Verhältnisse der Volumina

$$\left.\begin{aligned} \frac{V_1''}{V_1'} &= \left(\frac{T_1}{\theta_2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \text{ und } \frac{V_2''}{V_2'} = \left(\frac{T_2}{\theta_2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \\ \frac{V_2'}{V_1'} &= \left(\frac{T_1}{T_1}\right)^{\frac{1}{m-1}} \quad \text{»} \quad \frac{V_2''}{V_1''} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{\frac{1}{m-1}} \end{aligned}\right\} \cdot \quad (84),$$

das heifst aber: die Cylinderverhältnisse für alle mit demselben Gasgewicht (und derselben Gasart) zwischen denselben Temperaturen arbeitenden Maschinen mit derselben Leistung sind konstant.

Dasselbe gilt naturgemäfs auch von den Pressungsverhältnissen. Ebenso ist evident, dafs man statt einer absoluten Pressung auch eines der Volumina neben dem Gewichte G willkürlich ansetzen kann, um den Kreisprozefs eindeutig zu bestimmen.

22. Berechnung der Einzelarbeiten.

Schliefslich erübrigt noch die Berechnung der auf die einzelnen Cylinder entfallenden Arbeitsbeträge, die wir dem Schema Fig. 4 entsprechend mit L_{e_1}, L_{e_2}', L , L_{e_2} bezeichnen wollen. Wie aus dem Diagramm Fig. 3 hervorgeht, setzen sich diese Arbeiten für alle Cylinder aus 3 Bestandteilen zusammen: einer Hochdruckarbeit bei konstantem Druck, einer Expansions- oder Kompressionsarbeit bei variabelem Druck, sowie einer Niederdruckarbeit bei konstantem Druck, welche immer das umgekehrte Vorzeichen besitzt, wie die beiden vorhergehenden. So haben wir z. B. für den Cylinder E_1

$$L_{e_1} = p_1' V_1' + \int_{V_1'}^{V_2'} p\, dV - p_2' V_2'$$

oder wegen (76) bezw.

$$p.\, V^m = p_1'\, V_1'^m = p_2'\, V_2'^m$$

$$L_{e_1} = p_1'\, V_1' + p_1'\, V_1' \frac{1}{m-1}\left(\left[\frac{p_1'}{p_2'}\right]^{\frac{m}{m-1}} - 1\right) - p_2' V_2'.$$

Eliminieren wir mit Hilfe von (76) und (83) die Drücke und Volumina, so vereinfacht sich diese Gleichung in

$$L_{e_1} = \frac{m}{m-1} R\, G\, (T_1 - T_2) \quad . \quad . \quad . \quad (85).$$

In genau derselben Weise ergeben sich die Arbeiten der drei übrigen Cylinder:

$$L_{e_2} = \frac{k}{k-1} R\, G\, (T_2 - \theta_2) \quad . \quad . \quad . \quad (86),$$

$$L_{c_1} = \frac{n}{n-1} R\, G\, (\theta_2 - \theta_1) \quad . \quad . \quad . \quad (87),$$

$$L_{c_2} = \frac{k}{k-1} R\, G\, (\theta_1 - T_1) \quad . \quad . \quad . \quad (88).$$

Rechnet man, wie wir bisher thaten, die Expansionsarbeiten als gewonnene positiv, so werden die Kompressionsarbeiten L_{c_1} und L_{c_2} in (87) und (88) von selbst negativ. Addiert man endlich die sämtlichen Arbeiten und beachtet die Gleichung (64), (79) und (80), so ergibt sich die Totalarbeit

$$L = \Sigma L = \frac{Hc_1 (T_1 - T_2)}{A} - \frac{Kc_2 (\theta_1 - \theta_2)}{A},$$

oder da nach (13)

$$Hc_1 (T_1 - T_2) = Q_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89)$$

$$Kc_2 (\theta_1 - \theta_2) = Q_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (90)$$

war, in Übereinstimmung mit Gleichung (1)

$$AL = Q_2 - Q_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (91).$$

Bei Zahlenrechnungen, sowie praktischen Versuchen an thermodynamischen Maschinen ist es immer zweckmäfsig, diese Gleichung durch Summierung sämtlicher Energiegröfsen aufzustellen, da sie eine Kontrolle für die Exaktheit der erhaltenen Werte ermöglicht.

Aus der Betrachtung der Gleichungen (85) bis (88) geht übrigens noch der Satz hervor, dafs die auf die einzelnen Cylinder entfallenden Arbeitsbeträge bei allen unter sonst gleichen Verhältnissen auch mit gleichem Luftgewicht arbeitenden theoretisch vollkommenen Luftmaschinen immer dieselben Werte annehmen, unabhängig von der Wahl der Pressungen bezw. Volumina.

Es ist noch zu bemerken, dafs die soeben entwickelte Theorie der theoretisch vollkommenen Luftmaschine keinen Bezug auf den Zweck derselben nimmt, d. h., dafs sie in gleicher Weise gültig bleibt für eine Wärmekraft- und eine Kühlmaschine. Dieser Unterschied tritt lediglich in den Temperaturen, sowie im Vorzeichen der totalen Arbeit hervor.

Alle diese Verhältnisse lassen sich am besten durch die Berechnung von Zahlenbeispielen übersehen, in die wir jetzt eintreten wollen. Für die Berechnung einer theoretisch vollkommenen Wärmekraftmaschine legen wir dabei die Werte zu grunde, die sich aus dem auf S. 28 behandelten Beispiel (für Zustandsänderungen des Heizkörpers bei konstantem Druck) ergaben. Der Arbeitsprozefs soll sich hiernach abspielen zwischen den Temperaturen (absolut):

$$T_1 = 1850^0 \qquad \theta_1 = 309^0{,}43$$
$$T_2 = 288^0 \qquad \theta_2 = 283^0.$$

Weiterhin soll die Maschine 100 Pferdestärken leisten, was einem stündlichen Wärmeäquivalent von

$$AL = \frac{270\,000 \cdot 100}{424} = 63\,680 \text{ W.-E.}$$

entspricht. Diese Leistung ist aber das 13,138 fache der oben berechneten, so dafs wir, um die für unseren Fall notwendige Heizgas- und Kühlwassermenge auf die Stunde bezogen, die obigen Werte mit dieser Zahl zu multiplizieren haben. Auf diese Weise erhalten wir

$H = 20 \cdot 13{,}138 = 262{,}76$ kg, sowie $Q_1 = 98\,535$ W.-E.,
$K = 100 \cdot 13{,}138 = 1313{,}8$ kg, » $Q_2 = 34\,855$ »

Weiterhin sei wie früher

$$c_1 = 0{,}24 \quad ; \quad c_2 = 1$$
$$c_p = 0{,}2377 ; \quad c_v = 0{,}1685.$$

aufserdem die Konstante $R = 29{,}269$ (nach Regnault) angenommen.

Für unsere Berechnung gehen wir von der Erfahrungsthatsache aus, dafs es praktisch keine wesentlichen Schwierigkeiten bietet, Kompressionsprozesse unter Wärmeabfuhr so zu vollziehen, dafs die Gleichung der Druckkurve

$$p\,v^{1{,}2} = \text{Konst.}$$

wird, dafs also die Druckkurve [1]) selbst ungefähr in der Mitte zwischen der Adiabate und Isotherme des Gases verläuft. Wir setzen demgemäfs $n = 1{,}2$, woraus sich dann mit Hilfe von (72) die in der Stunde in der Maschine zirkulierende Luftmenge

$$q = 7\,402 \text{ kg}$$

ergibt. Damit aber folgt aus (71) umgekehrt

$$m = 1{,}39.$$

---

[1]) Kurven, welche allgemein dem Gesetze $p\,v^m = \text{Konst.}$ gehorchen, bezeichnet man nach Zeuners Vorgange (siehe dessen Technische Thermodynamik) als polytropische; dieselben gewinnen durch die obigen Untersuchungen eine grofse Bedeutung für die Theorie thermodynamischer Maschinen. Es läfst sich übrigens der Nachweis führen, dafs streng genommen zur Durchführung von Zustandsänderungen nach polytropischen Kurven ein ganz bestimmter Zusammenhang zwischen dem Gesetze der Volumenänderung und dem der Wärmezu- oder Abfuhr bezogen auf die Zeit bestehen mufs. Eine derartige Untersuchung habe ich durchgeführt in meiner Abhandlung »Theorie der Luftkompression mit Einspritzkühlung« Civilingenieur 1890. Heft 2.

Zur eindeutigen Durchführung des Kreisprozesses setzen wir noch fest, dafs der niederste in der Maschine vorkommende, der Temperatur θ_2 entsprechende Druck

1) $p_2'' =$ 10000 kg/qm entspr. $\theta_2 = 283°$

sein soll. Dann haben wir:

2)	aus Gl. (77)	$p_1' =$	17086 kg/qm entspr. $\theta_1 = 309°,42$
3)	» » (68)	$p_1' =$	8020200 » » $T_1 = 1850°$
4)	» » (69) oder (76)	$p_2' =$	10602 » » $T_2 = 288°$
5)	» » (83)	$RG =$	$216 \cdot 850$
6)	» » (83)	$V_2'' =$	6137 cbm pro Stunde
7)	» » (83)	$V_1'' =$	3927 » » »
8)	» » (83)	$V_2' =$	5889 » » »
9)	» » (85)	$Le_1 = +$	$5564{,}04 \cdot RG$ mkg pro Stunde
10)	» » (86)	$Le_2 = +$	$17{,}20 \cdot RG$ » » »
11)	» » (87)	$Lc_1 = -$	$158{,}52 \cdot RG$ » » »
12)	» » (88)	$Lc_2 = -$	$5299{,}60 \cdot RG$ » » »

Summiert man die Arbeiten, so erhält man

$$\Sigma(L) = 123{,}13 \cdot RG \text{ mkg} = 27\,000\,000 \text{ mkg pro Stunde}$$

entsprechend der Voraussetzung.

Aus den Werten für L folgt, dafs die einzelnen Cylinder, deren wirkliche Volumina aus (6) bis (8) leicht durch Annahme einer bestimmten Hubzahl pro Stunde festgestellt werden können, in sehr verschiedenartiger Weise an der Totalarbeit $\Sigma(L)$ beteiligt sind. Diese Arbeit erscheint insbesondere als Differenz der beiden an sich viel gröfseren Beträge $L_{e1} + L_{e2}$, sowie $L_{c1} + L_{c2}$. Aufserdem steigt die Pressung in E_1 entsprechend der Temperatur $T_1 = 1850°$ so hoch an, dafs man kaum je daran denken darf, derselben sich praktisch zu nähern (800 atm). Würde man aber z. B. kleine Pressungen von vornherein voraussetzen, so wäre damit eine Erhöhung des Wertes von G und damit ein Anwachsen der ohnehin schon sehr bedeutenden Volumina V verbunden.

Für eine praktische Durchführung des Prozesses wäre übrigens noch zu berücksichtigen, dafs infolge der enormen Pressungen, sowie der die Totalarbeit teilweise vielfach übertreffenden Einzelarbeiten die Reibungsverluste sehr erheblich ausfallen müssen, sodafs eine solche Maschine unter Umständen gar nicht betriebsfähig sein dürfte.

Mit allen diesen Fragen hat natürlich die theoretische Möglichkeit dieser Kreisprozesse nichts zu thun, deren Wert vor allem darin beruht, dafs sie uns einen Vergleichsmafsstab für die augenblicklich üblichen Heifsluftmaschinen[1]) gewährt.

Auf ganz ähnliche praktische Schwierigkeiten stofsen wir übrigens auch bei der Ausführung von Kaltluftmaschinen, für die wir ebenfalls ein Zahlenbeispiel anführen wollen. Es sei hier eine Salzlösungsmenge von $H = 30\,000$ kg stündlich von $-2°$, also $T_1 = 271°$, auf $-5°$, oder $T_2 = 268°$, abzukühlen, wobei $K = 15\,000$ kg Kühlwasser von $+10°$, also $\theta_2 = 283°$, zur Verfügung stehen. Dabei sei

$$c_1 = 0{,}9 \text{ und } c_2 = 1.$$

Dann folgt aus (81) $\theta_1 = 288°{,}65$
» (89) $Q_2 = 81\,000$ W.-E. pro Stunde,
» (90) $Q_1 = 85\,000$ » » »
» (91) $AL = -4000$ » » »

d. i. $L = 1696000$ mkg in der Stunde oder 6,28 Pferdestärken.

Um uns nun mit den Pressungen innerhalb technisch zulässiger Grenzen zu bewegen, setzen wir den höchsten und niedersten Druck willkürlich fest und zwar

1) $p_1'' = 1\,200\,000$ kg/qm entsprechend $\theta_1 = 288°{,}65$
2) $p_2' = 300\,000$ » » $T_2 = 268°$.

Dann folgt durch Verbindung der Gleichungen (68), (69), (76), (77)

3) $m = 1{,}0096$
4) $n = 1{,}0176$
5) aus (72) oder (73) $G = 3846$ kg pro Stunde
6) » (68) » (76) $p_1' = 361\,800$ kg/qm entspr. $T_1 = 271°$
7) » (69) » (77) $p_2'' = 965\,900$ » » $\theta_2 = 283°$
8) » (83) $V_2' = 100{,}56$ cbm in der Stunde
9) » (83) $V_2'' = 21{,}23$ » » » »
10) » (83) $V_1' = 88{,}05$ » » » »
11) » (83) $RG = 112 \cdot 568$

[1]) Die oben erhaltenen Resultate sind übrigens schon darum nur als Näherungswerte zu betrachten, weil bei den in Frage kommenden starken Pressungen das Mariotte-Gay-Lussacsche Gesetz nicht mehr streng gültig ist.

12) aus (85) $Le_1 = +315{,}52\ RG$ in der Stunde
13) » (86) $Le_2 = +\ 43{,}16\ RG$ » » »
14) » (87) $Lc_1 = -337{,}21\ RG$ » » »
15) » (88) $Lc_2 + -36{,}61\ RG$ » » »

Durch Summierung der Arbeiten folgt schliefslich
$\Sigma(L) = -15{,}14 \cdot RG =$ rd. 1 700 000 mkg stündlich.

Auch hier zeigt sich, dafs die Einzelarbeiten durchgehends Vielfache der Totalarbeit sind, wodurch im Falle der Ausführung grofse Reibungsverluste entstehen würden.

23. Summen der positiven und negativen Arbeitsbeträge.

Da nun die Gröfse der Reibungsverluste entscheidend für die Ausführbarkeit unserer Maschinen ist, wollen wir dieser Frage auf Grund unserer Formeln etwas näher treten. Die Reibungsverluste wachsen erfahrungsgemäfs mit den Einzelarbeiten [1]), sodafs es zweckmäfsig sein dürfte, deren Grenzwerte hier zu ermitteln. Wir fassen zu diesem Zwecke die positiven und negativen Arbeitsbeträge für sich zusammen und erhalten so aus (85) bis (88)

$$\left.\begin{aligned} L_e = L_{e1} + L_{e2} &= R \cdot G \left\{ \frac{m}{n-1} (T_1 - T_2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{k}{k-1} (T_2 - \theta_2) \right\} \\ L_c = L_{c1} + L_{c2} &= R \cdot G \left\{ \frac{m}{n-1} (\theta_2 - \theta_1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{k}{k-1} (\theta_1 - T_1) \right\} \end{aligned}\right\} \quad (92).$$

Eliminieren wir hieraus m und n mit Hilfe von (79) und (80) und berücksichtigen dabei (63) und (64), so gehen diese Werte über in

[1]) Siehe hierüber meine Abhandlung: »Der mechanische Wirkungsgrad von Kolbenmaschinen.« Zeitschrift d. Ver. d. Ingenieure 1894. Heft 43.

$$\left.\begin{aligned} L_e &= RG \cdot \frac{k}{k-1}(T_1 - \theta_2) + \frac{Hc_1(T_1 - T_2)}{A} \\ L_c &= RG \cdot \frac{k}{k-1}(\theta_2 - T_1) + \frac{Kc_2(\theta_2 - \theta_1)}{A} \end{aligned}\right\} \quad (93)$$

oder wegen (89) und (90)

$$\left.\begin{aligned} AL_e &= ARG \cdot \frac{k}{k-1}(T_1 - \theta_2) + Q_1 \\ AL_c &= -ARG \cdot \frac{k}{k-1}(T_1 - \theta_2) + Q_2 \end{aligned}\right\} \quad (94),$$

d. h. die Summen der positiven bezw. negativen Arbeitsäquivalente sind, absolut genommen, gröfser als die zugeführte bezw. entzogene Wärme, und zwar in beiden Fällen um das Äquivalent der adiabatischen Expansion bezw. Kompressionsarbeit des arbeitenden Körpers zwischen den beiden Temperaturen T_1 und θ_2. Dieses letztere Äquivalent ist aber, da alle anderen Werte durch den Kreisprozefs allgemein bestimmt sind, nur dem Gewichte G des arbeitenden Körpers proportional, sodafs wir die Summen L_e und L_c im Diagramm Fig. 5 als gerade Linien darstellen können, worin G als Abscisse und die Energiegröfsen Q_1, Q_2, L, L_e, L_c als Ordinaten eingetragen sind. Die Geraden L_e und L_c verlaufen dann parallel in einem Ordinatenabstande L.

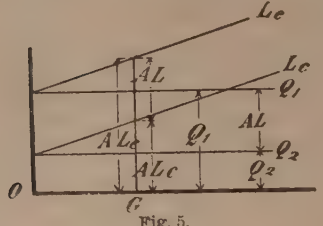


Fig. 5.

Hieraus erkennt man, dafs die Werte L_e und L_c entsprechend der Gleichung (94) mit G unbegrenzt wachsen und für $G = \infty$ einander gleich werden,

woraus folgt, dafs man für praktische Ausführungen G so klein als möglich wählen soll.

Die Bedeutung der Gleichungen (94) liegt aber vor allem darin, dafs die Werte für L_e und L_c mit G nicht verschwinden, sondern die Grenzwerte

$$\left.\begin{aligned} AL'_e &= Q_1 \\ AL'_c &= Q_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (95)$$

annehmen. Das heifst aber, dafs es Vorgänge gibt, bei denen thermodynamische Energieumwandlungen ohne Mitwirkung eines materiellen arbeitenden Körpers von statten gehen, und dafs in diesem Falle die Wärmemengen θ_1 und θ_2 eine vollständige Umwandlung erfahren. Solche Vorgänge haben wir nun in den thermoelektrischen Erscheinungen vor uns, welche bekanntlich den Gleichungen (95) genügen, wenn man unter L_e und L_c die Produkte der Spannungsdifferenzen an den einzelnen Lötstellen mit der Stromstärke und unter A die Äquivalentzahl zwischen der in elektrischen Einheiten und in W.-E. gemessenen Energie versteht. Über das Wesen dieser Vorgänge geben unsere Gleichungen allerdings keine Auskunft, dagegen widerlegen sie direkt die von W. Thomson [1]) und später auch von Kohlrausch [2]) benutzte Annahme, dafs der Strom Wärme als solche mit sich führen könne.

---

[1]) Transactions of Edinb. R. Soc. Vol. XXI. Seite 133 und 143.

[2]) Göttinger Nachrichten 1874 Febr. und Pogg. Ann. Bd. 156, Seite 601. Siehe auch Clausius, »Mechan. Wärmetheorie« Bd. II. Seite 336.

Da eine weitere Verfolgung der Theorie der Thermoströme [1]) aufserhalb des Rahmens dieser Arbeit liegt, wollen wir uns mit diesen Andeutungen begnügen und gehen über zur

24. Theorie der theoretisch vollkommenen Dampfmaschine.

In derselben arbeite ein Gemisch von Dampf in gesättigtem Zustande und gleichartiger Flüssigkeit, so zwar, dafs der Dampf niemals überhitzt, sondern höchstens trocken gesättigt wird. Bei einer bestimmten Temperatur T wird demnach die Gewichtseinheit des Gemisches x kg Dampf und $(1 - x)$ kg Flüssigkeit enthalten. Das Gesamtvolumen v der Gewichtseinheit setzt sich demnach zusammen aus dem Volumen des Dampfes, dessen spezifisches Volumen s, und dem der Flüssigkeitsmenge, deren spezifisches Volumen σ sein möge, also

$$v = x \cdot s + (1 - x)\,\sigma = x\,(s - \sigma) + \sigma,$$

wofür man abkürzungshalber gewöhnlich schreibt

$$v = x \cdot u + \sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (96).$$

Daraus folgt aber durch Differentiation

$$dv = d\,(x \cdot u) + d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97).$$

Für die meisten Körper ist nun das spezifische Volumen σ der Flüssigkeit sehr klein gegenüber

---

[1]) Die Gleichungen (95) ergeben sich übrigens auch allgemein aus der Grundgleichung für den I. Hauptsatz der Thermodynamik, welche, wenn U die Energie des Körpers bezogen auf die Gewichtseinheit bedeutet, die Form

$$d\,Q = A\,G\,d\,U + A\,d\,L$$

annimmt. Für $G = 0$ wird diese Gleichung integrabel und und ergibt so (95).

dem des gleichartigen Dampfes bezw. dem Volumenzuwachs u bei der Verdampfung, und ebenso kann man die Veränderung $d\sigma$ als klein gegen dv betrachten, sodafs (97) näherungsweise übergeht in

$$dv = d(x \cdot u) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97a).$$

Bezeichnet man nun mit q die Flüssigkeitswärme, d. h. den Überschufs an Wärme eines kg Flüssigkeit bei der Temperatur t^0 (absolut T) gegenüber der Temperatur 0^0 (absolut 273^0), sowie mit ϱ den Wärmeüberschufs von 1 kg Dampf gegenüber der Flüssigkeit von derselben Temperatur, so wird durch die Zuführung der Wärmemenge dQ der Wärmeinhalt des flüssigen Teiles des Gemisches, dessen Totalgewicht G kg sein möge, um $G(1-x)dq - G\,q\,dx$ steigen. Gleichzeitig aber wird der Wärmeinhalt des Dampfes, welcher $G\,x\,(q+\varrho)$ betrug, um $G\,x\,dq + G\,q\,dx + G\,d(x \cdot \varrho)$ anwachsen, während eine äufsere Arbeit von $A \cdot G \cdot p \cdot dv$ geleistet wird. Wir haben also die Energiegleichung durch Summierung dieser Beträge

$$dQ = G(dq + d[x \cdot \varrho] + Ap \cdot dv) \quad . \quad (98),$$

worin A wieder die Äquivalentzahl zwischen Wärme und mechanischer Arbeit bedeutet. Diese Gleichung besteht durchgehends aus vollständigen Differentialen, die sich entsprechend den Eigenschaften der gesättigten Dämpfe ausnahmslos auf die Temperatur als Unvariabele zurückführen lassen. Sie ist mithin integrabel und ergibt zwischen zwei durch Indizes angedeuteten Grenzzuständen

$$Q = G(q_1 - q_2 + x_1\varrho_1 - x_2\varrho_2) + AG \cdot \int_2^1 p\,dV \quad (99).$$

Von dieser Formel werden wir weiter unten zur Bestimmung der Arbeitsgröfsen Gebrauch machen.

Die Differentialgleichung (98) läfst sich indessen noch durch Einführung der gesamten latenten Wärme

$$r = \varrho + A\,p\,u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (100)$$

umformen, und geht dann mit Berücksichtigung von (97) über in

$$dQ = G\,(dq + d\,[x \cdot r] - A\,x \cdot u\,dp + A\,p\,d\sigma) \quad (101)$$

wofür wir unter Vernachlässigung von $d\sigma$ in den meisten Fällen schreiben können

$$dQ = G\,(dq + d\,[x r] - A\,x\,u\,dp) \quad . \quad (101a).$$

Zur weiteren rechnerischen Behandlung eignen sich diese Gleichungen noch nicht, weil in ihnen das Differential der Arbeit mit der Variabelen x verbunden auftritt. Dieses Differential läfst sich nun mit Hilfe des II. Hauptsatzes der Thermodynamik eliminieren. Läfst man nämlich 1 kg der Flüssigkeit unter Wärmezufuhr bei konstanter Temperatur vollständig verdampfen, dann die Temperatur durch eine unendlich kleine adiabatische Zustandsänderung um dT abnehmen und führt durch Kondensation und nachträgliche adiabatische Kompression den Körper wieder in seinen Anfangszustand zurück, so hat derselbe einen Carnotschen Kreisprozefs vollzogen. Für diesen aber gilt nach Gleichung (9)

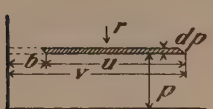


Fig. 6.

$$\frac{A\,dL}{Q} = \frac{dT}{T}$$

oder,[1]) da (siehe Fig. 6) $dL = u\,dp$ und $Q = r$ ist,

$$\frac{r}{u} = A\,T\frac{dp}{dT} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (102).$$

[1]) Die kurze Ableitung rührt von W. Ostwald her. Siehe dessen »Grundrifs der allgemeinen Chemie.« 1890. S. 249.

Dies ist die bekannte Clapeyronsche Gleichung, mit deren Hilfe wir aus (101) erhalten

$$dQ = G\,(dq + A\,p\,d\sigma) + G\left(d\,[xr] - \frac{x\,r\,dT}{T}\right)$$

oder, wenn wir zur Abkürzung die Temperaturfunktion τ durch

$$d\tau = \frac{dq + A\,p\,d\sigma}{T} \quad . \quad . \quad . \quad (103)$$

einführen,

$$dQ = G\,T\,d\left(\tau + \frac{x\,r}{T}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (104).$$

Diese Gleichung[1]) eignet sich in ganz hervorragender Weise zur Verfolgung unseres Problems, da sie durch Einführung der Wärme Q als Funktion der Temperatur sofort integrabel wird. Für die Werte τ und r sind überdies ausführliche Tabellen[2]), meist auf Grund der Regnaultschen Versuche, berechnet worden, so dafs die Resultate sich leicht rechnerisch verwerten lassen.

Der Zustand des Gemisches ist nun an jeder Stelle des Kreisprozesses vollständig bestimmt durch die Temperatur T und die Zahl x; mit der ersteren sind unmittelbar auch alle die übrigen Gröfsen u, p, ϱ, r, τ und σ gegeben. Den vier charakteristischen Temperaturen

---

[1]) Diese Formel rührt von Zeuner her, der sie unter Vernachlässigung von $d\sigma$ und Definition von τ durch $T\,d\tau = d\,q$ aus den früheren Gleichungen ableitete. Da ich von dieser Vernachlässigung absehen wollte, habe ich die ganze Ableitung, wenn auch in anderer Weise als Zeuner (Techn. Thermodynamik II. Bd. S. 51), hier wiederholt.

[2]) Siehe Zeuner, Techn. Thermodynamik II. Bd. Anhang. Diese Tabellen beruhen ausschliefslich auf Regnaultschen Versuchsergebnissen.

T_1 sollen entsprechen die Werte
$x_1'\ u_1'\ p_1'\ \varrho_1'\ r_1'\ \tau_1'\ \sigma_1'$,
θ_1 sollen entsprechen die Werte
$x_1''\ u_1''\ p_1''\ \varrho_1''\ r_1''\ \tau_1''\ \sigma_1''$,
θ_2 sollen entsprechen die Werte
$x_2''\ u_2''\ p_2''\ \varrho_2''\ r_2''\ \tau_2''\ \sigma_2''$,
T_2 sollen entsprechen die Werte
$x_2'\ u_2'\ p_2'\ \varrho_2'\ r_2'\ \tau_2'\ \sigma_2'$,

dann haben wir für die adiabatischen Zustandsänderungen zwischen T_1 und θ_1 einerseits, sowie θ_2 und T_2 andererseits wegen $dQ = 0$ aus (104) durch Integration

$$\tau_1' + \frac{x_1' r_1'}{T_1} = \tau_1'' + \frac{x_1'' r_1''}{\theta_1} \quad . \quad . \quad (105),$$

$$\tau_2' + \frac{x_2' r_2'}{T_2} = \tau_2'' + \frac{x_2'' r_2''}{\theta_2} \quad . \quad . \quad (106).$$

Die beiden anderen Zustandsänderungen ergeben sich aus (104), indem wir das Wärmeelement aus (58) und (59) bestimmen. Wir erhalten so

$$\frac{Hc_1}{G}\frac{dT}{T} = d\left(\tau + \frac{xr}{T}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (107),$$

$$\frac{Kc_2}{G}\frac{d\theta}{\theta} = d\left(\tau + \frac{xr}{\theta}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (108),$$

mithin durch Integration zwischen den entsprechenden Temperaturen

$$\frac{Hc_1}{G}\lg n\frac{T_1}{T_2} = \tau_1' - \tau_2' + \frac{x_1' r_1'}{T_1} - \frac{x_2' r_2'}{T_2} \quad (109),$$

$$\frac{Kc_2}{G}\lg n\frac{\theta_1}{\theta_2} = \tau_1'' - \tau_2'' + \frac{x_1'' r_1''}{\theta_1} - \frac{x_2'' r_2''}{\theta_2} \quad (110).$$

Subtrahiert man diese beiden Gleichungen und berücksichtigt (105) und (106), so bleibt nur noch

$$\frac{Hc_1}{G} \lg n \frac{T_1}{T_2} = \frac{Kc_2}{G} \lg n \frac{\theta_1}{\theta_2},$$

oder

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{Hc_1} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{Kc_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (111),$$

wie früher [vergl. (11) und (81)].

25. Berechnung der Volumina.

Die den einzelnen Temperaturen entsprechenden Volumina, welche, zugleich auf die Zeiteinheit bezogen, die Hubvolumina der einzelnen Cylinder des Schemas der vollkommenen Dampfmaschine angeben, berechnen sich aus (96)

$$V = Gv = G(xu + \sigma) \quad . \quad . \quad . \quad (112),$$

also

für T_1 . . . $V_1' = G(x_1' u_1' + \sigma_1')$ . . . (113),
» θ_1 . . $V_1'' = G(x_1'' u_1'' + \sigma_1'')$ . . . (114),
» θ_2 . . $V_2'' = G(x_2'' u_2'' + \sigma_2'')$ . . . (115),
» T_2 . . $V_2' = G(x_2' u_2' + \sigma_2')$ . . . (116).

Während nun durch die vier Temperaturen T_1, θ_1, θ_2, T_2 alle Werte von u, p, ϱ, r, τ und σ unmittelbar gegeben sind, haben wir zur Bestimmung der neun Unbekannten x_1', x_1'', x_2', x_2'', G, V_1', V_1'', V_2', V_2'' nur die Gleichungen (105), (106), (109), (110), sowie (113) bis (116) zur Verfügung, von denen überdies die vier letzten durch die Beziehung (111) zusammenhängen. Daraus aber ergibt sich ebenso wie bei den Luftmaschinen eine doppelt unendliche Mannigfaltigkeit von Kreisprozessen, welche mit einem und demselben dampfförmigen Körper zwischen den vier charakteristischen

Temperaturen verlaufend, in Bezug auf die Wärmeübergänge und Arbeitsleistung dasselbe Resultat ergeben.

Die oben entwickelten Formeln verlieren aber sofort ihre Gültigkeit, wenn die Werte $x > 1$ werden, d. h. wenn der Dampf an irgend einer Stelle des Kreisprozesses in den überhitzten Zustand übergeht. Dies kann übrigens leicht durch passende Wahl von zwei Werten x vermieden werden, durch die dann mit Hilfe der obigen Gleichungen alle anderen Unbekannten eindeutig bestimmt sind.

Tritt dagegen — infolge der hohen Temperaturen des Heizkörpers, mit dem ja der arbeitende laut unseren Grundbedingungen für theoretisch vollkommene Maschinen, immer dieselbe Temperatur annehmen mufs — an irgend einer Stelle eine solche Überhitzung ein, was sich durch Werte von $x > 1$ aus den obigen Gleichungen ergibt, so sind für die in Frage stehenden Perioden die Gleichungen zu erweitern, worauf wir unten zurückkommen werden.

26. Berechnung der Einzelarbeiten.

Zunächst haben wir noch unter der Annahme, dafs der Dampf immer gesättigt bleibt, die Arbeitsleistungen der einzelnen Cylinder unseres Schemas Fig. 4 zu ermitteln, wobei wir wieder von dem im Schema mit E_1 bezeichneten Expansionscylinder ausgehen wollen. Die in diesem Organ geleistete Arbeit setzt sich zusammen aus einer Volldruckarbeit $p_1' V_1'$, einer Expansionsarbeit

$$\int_{V_1'}^{V_2'} p\,dV,$$

welche sich aus (99) ergibt, und einer negativen Rückdruckarbeit $p_2' V_2'$, also

$$L_{e_1} = p_1' V_1' + \int_{V_1'}^{V_2'} p\,dV - p_2' V_2'.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (113), (116) und (99) wird hieraus

$$AL_{e_1} = G\{(q_1' + Ap_1'\sigma_1') - (q_2' + Ap_2'\sigma_2') + x_1'(\varrho_1' + Ap_1' u_1') - x_2'(\varrho_2' + Ap_2' u_2')\} + Q_1,$$

oder wegen (100)

$$AL_{e_1} = G\{(q_1' + Ap_1'\sigma_1') - (q_2' + Ap_2'\sigma_2') + x_1' r_1' - x_2' r_2'\} + Q_1 \quad (117).$$

Auf dieselbe Weise erhalten wir dann die übrigen Arbeitsbeträge:

$$AL_{e_2} = G\{(q_2' + Ap_2'\sigma_2') - (q_2'' + Ap_2''\sigma_2'') + x_2' r_2' - x_2'' r_2''\} \quad (118),$$

$$AL_{c_1} = G\{(q_2'' + Ap_2''\sigma_2'') - (q_1'' + Ap_1''\sigma_1'') + x_2'' r_2'' - x_1'' r_1''\} - Q_2 \quad (119),$$

$$AL_{c_2} = G\{(q_1'' + Ap_1''\sigma_1'') - (q_1' + Ap_1'\sigma_1') + x_1'' r_1'' - x_1' r_1'\} \quad (120).$$

Die Summierung dieser vier Gleichungen ergibt, wie früher

$$AL = Q_1 - Q_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (121).$$

Addieren wir dagegen die positiven und negativen Arbeiten für sich, so erhalten wir

$$AL_e = A(L_{e_1} + L_{e_2}) = G\{(q_1' + Ap_1'\sigma_1') - (q_2'' + Ap_2''\sigma_2'') + x_1' r_1' - x_2'' r_2''\} + Q_1 \quad (122),$$

$$AL_c = A(L_{c_1} + L_{c_2}) = G\{(q_2'' + Ap_2''\sigma_2'') - (q_1' + Ap_1'\sigma_1') + x_2'' r_2'' - x_1' r_1'\} - Q_1 \quad (123),$$

worin der in beiden Formeln gleiche und nur im Vorzeichen entgegengesetzte Klammerausdruck wie schon bei der Luftmaschine allein von den beiden Zuständen bei T_1 und θ_2 abhängt[1]) (siehe S. 64).

Aus den beiden letzten Gleichungen geht noch hervor, dafs die Summen der positiven und negativen Arbeiten absolut verstanden mit dem Gewichte G abnehmen, obgleich sie aufserdem noch eine der Variabelen x (das andere x, welches die Formeln überdies enthalten, läfst sich immer durch das erste und G ausdrücken) enthalten. Es ist darum nicht möglich, diese Beziehungen durch ein ebenes Diagramm, wie es in Fig. 5 für Luftmaschinen geschah, darzustellen, obgleich der Grenzfall $G = 0$ auch hier wieder auf die beiden Gleichungen (95) führt.

Mit der Anwendung der Gleichungen der theoretisch vollkommenen Dampfmaschine sind wir übrigens genötigt, uns lediglich auf Kaltdampfmaschinen zu beschränken, weil die theoretisch vollkommenen Heifsdampfmaschinen mit Temperaturintervallen arbeiten, welche für alle bekannten Körper das Gültigkeitsbereich der Gleichungen für den Dampfzustand erheblich überschreiten.

Es möge im folgenden eine theoretisch vollkommene Kaltdampfmaschine berechnet werden, deren charakteristische Temperaturen wie bei dem oben berechneten Beispiel der Kaltluftmaschine (Seite 68)

$$T_1 = 271^\circ \quad , \quad \theta_1 = 288^\circ{,}67$$
$$T_2 = 268^\circ \quad , \quad \theta_2 = 283^\circ$$

[1]) Die oben durchgeführte Berechnung der Arbeiten bezieht sich auf den Fall der Wärmekraftmaschinen, wie aus der Definition der Arbeitsgröfsen L für die einzelnen Cylinder des Schemas Seite 53 hervorgeht. Für Kühlmaschinen ist bekanntlich $\theta_1 > T_1$, $\theta_2 > T_2$, $\theta_2 > \theta_1$, deshalb ist für diese θ_1 und T_2 an Stelle von T_1 und θ_2 zu setzen.

sein sollen. Auch die Mengen und spezifischen Wärmen des Heiz- und Kühlkörpers seien dieselben, wie dort, mithin auch die Wärmemengen und der totale Arbeitsaufwand. Es ist demnach pro Stunde

$$\text{mit } \sigma_1 = 0{,}9 \quad \text{und} \quad H = 30000 \text{ kg},$$
$$Q_1 = Hc_1 (T - T_2) = 81000 \text{ W.-E.},$$
$$\text{mit } \sigma_2 = 1 \quad \text{und} \quad K = 15000 \text{ kg},$$
$$Q_2 = Kc_2 (\theta_1 - \theta_2) = 85000 \text{ W.-E.}$$
$$AL = -4000 \text{ W.-E.}$$

Da die zur Zeit gebräuchlichen Kühlmaschinen mit Ammoniak (NH_3), schweflige Säure (SO_2) oder Kohlensäure (CO_2) als vermittelndem Körper arbeiten, so wollen wir auch unser Beispiel für alle drei Dampfarten parallel durchrechnen, wobei wir uns ausschliefslich auf die von Zeuner auf Grund der Regnaultschen Versuchsdaten berechneten Dampftabellen[1]) stützen wollen. Schliefslich setzen wir zur eindeutigen Bestimmung der Aufgabe noch voraus, dafs die spezifischen Dampfmengen für $\theta_1 : x_1' = 0$ und für $\theta_2 : x_2'' = 1$ sein mögen.

Da die benutzten Dampftabellen die Temperatur als Urvariable enthalten und die Werte von p, u, σ, ϱ, τ in Intervallen von 5° Celsius angeben, so sind für unsere Rechnung häufig Interpolationen nötig. Auf diese Weise ergeben sich die nachstehenden Werte[2]):

		NH_3	SO_2	CO_2
1) für $\theta_1 = 288°{,}67$	$p_1'' =$	75629 kg/qm	28783 kg/qm	548232 kg/qm
2) » $\theta_1 = 288°{,}67$	$\tau_1'' =$	0,0601	0,0237	0,0521
3) » $\theta_2 = 283°$	$p_2'' =$	62710 kg/qm	23379 kg/qm	474749 kg/qm
4) » $\theta_2 = 283°$	$\tau_2'' =$	0,0379	0,0147	0,0318
5) » $\theta_2 = 283°$	$\frac{r_2''}{\theta_2} =$	1,0882	0,3120	0,1694
6) aus (110) . . .	$G =$	280 kg/Std.	982 kg/Std.	1996 kg/Std.
7) für $\theta_2 = 283°$	$u_2'' =$	0,209 cbm	0,1514 cbm	0,00594 cbm
8) aus (115) . .	$V_2'' =$	58,52 cbm/Std.	148,68 cbm/Std.	11,79 cbm/Std.
9) für $T_2 = 268°$	$p_2'' =$	35789 kg/qm	12874 kg/qm	318710 kg/qm
10) » $T_2 = 268°$	$\tau_2'' =$	− 0,0183	− 0,0066	− 0,0139
11) » $T_2 = 268°$	$\frac{r_2''}{T_2} =$	1,1864	0,3448	0,2227
12) » $T_2 = 268°$	$u_2' =$	0,3542 cbm	0,2680 cbm	0,01056 cbm

[1]) Zeuner a. a. O. Anhang des II. Bandes.

[2]) Mit Vernachlässigung der σ, welche durchgehends sehr klein gegen die u sind.

		NH_3	SO_2	CO_2
13) aus (106) . .	$x_2' =$	0,965	0,966	0,966
14) » (116) . .	$V_2' =$	95,704 cbm/Std.	254,24 cbm/Std.	20,25 cbm/Std.
15) für $T_1 = 271^0$	$p_1' =$	40401 kg/qm	14654 kg/qm	346978 kg/qm
16) » $T_1 = 271^0$	$\tau_1' =$	— 0,0078	— 0,0026	— 0,0056
17) » $T_1 = 271^0$	$\frac{r_1'}{T_1} =$	1,1665	0,3384	0,2128
18) » $T_1 = 271^0$	$u_1' =$	0,3187 cbm	0,2334 cbm	0,2128 cbm
19) aus (105) . .	$x_1' =$	0,054	0,077	0,271
20 » (113) . .	$V_1' =$	4,819 cbm/Std.	17,68 cbm/Std.	4,40 cbm/Std.

Die thatsächlichen Cylinderdimensionen ergeben sich aus den Posten 8), 14) und 20) unter Annahme einer bestimmten Hubzahl in der Stunde. Die Arbeitsleistungen sind weiterhin in der folgenden Tabelle enthalten:

		NH_3	SO_2	CO_2	
21) für $T_2 = 268^0$	$q_2' =$	— 4,957 W.-E.	— 1,793 W.-E.	— 3,760 W.-E.	
22) » $T_2 = 268^0$	$x_2' r_2' =$	306,83 »	89,261 »	57.65 »	
23) » $\Theta_2 = 283^0$	$q_2'' =$	+ 10,542 »	+ 4,06 »	+ 8,85 »	
24) » $\Theta_2 = 283^0$	$r_2'' =$	307,96 »	88,287 »	47,94 »	
25) aus (118) . .	$ALc_2 =$	— 4656 »	— 4797 »	— 5788 »	stündl.
26) für $\Theta_1 = 288^0{,}67$	$q_1'' =$	+ 16,900 »	+ 6,662 »	+ 14,668 »	
27) aus (119) . .	$ALc_1 =$	— 552 »	— 851 »	— 929 »	stündl.
28) für $T_1 = 271^0$.	$q_1' =$	— 1,99 »	— 0,72 »	— 1,504 »	
29) » $T_1 = 271^0$	$x_1' r_1' =$	17,07 »	7,095 »	15,620 »	
30) aus (120) . .	$ALc_2 =$	+ 489 »	+ 318 »	+ 1102 »	stündl.
31) » (117) . .	$ALe_1 =$	+ 715 »	+ 1331 »	+ 1611 »	»
32) » (123) . .	$ALc =$	— 5208 »	— 5658 »	— 6717 »	»
33) » (122) . .	$ALe =$	+ 1204 »	+ 1649 »	— 2713 »	»
34) » (122) . .	$\Sigma AL =$	— 4004 »	— 3999 »	— 4004 »	»

Aus den drei letzten Positionen ergibt sich, dafs die Einzelleistungen, insbesondere die Summen der negativen bezw positiven Arbeiten in der theoretisch vollkommenen Kaltdampfmaschine durchaus keine Vielfachen der Totalarbeit werden, wie sich dies bei den Luftmaschinen ergab. Aus diesem Grunde kann man auch erwarten, dafs die Reibungswiderstände in der Maschine sich innerhalb zulässiger Grenzen bewegen, und dafs folglich die Maschinen selbst technisch ausführbar sind.

Die zur Zeit gebräuchlichsten Kaltdampfmaschinen unterscheiden sich allerdings ganz erheblich von unserem Schema, indem bei ihnen nicht nur die gesamte Kompression — nahezu adiabatisch — bis zur Maximaltemperatur in einem Cylinder

ausgeführt, sondern auch die Expansionscylinder ganz weggelassen und durch ein Drosselventil ersetzt werden. Die Folge hiervon ist naturgemäfs ein höherer Aufwand von (negativer) Arbeit L_c, wozu noch der gänzliche Wegfall der positiven Arbeiten L_e kommt, so dafs die ausgeführten Maschinen gegenüber einer unter sonst gleichen charakteristischen Temperaturen arbeitenden, theoretisch vollkommenen Maschine für dieselbe Kälteleistung Q einen bedeutend gröfseren Arbeitsaufwand erfordern. Wie aus den letzten Zahlenwerten weiterhin hervorgeht, wird durch die in der Praxis üblichen Vereinfachungen die Kohlensäuremaschine am ungünstigsten beeinflufst, während die positiven Arbeiten bei der Ammoniakmaschine so gering ausfallen, dafs man von ihrer Nutzbarmachung mit Rücksicht auf die Reibungswiderstände absehen kann.

27. Theorie theoretisch vollkommener Maschinen, welche mit teilweise überhitzten Dämpfen arbeiten.

Nahezu alle dampfförmigen Körper, welche uns als vermittelnde zum Betriebe thermodynamischer Maschinen zur Verfügung stehen, haben die Eigenschaft, sich durch adiabatische Kompression zu überhitzen[1]), was sich in unseren Gleichungen dadurch zeigt, dafs $x \geq 1$ wird. Da die Gültigkeit der Gleichungen aber an die Bedingung $x < 1$ geknüpft ist, so ist deren weitere Verwendung für den Zustand der Überhitzung unzulässig. Es liegt nun nahe, in diesem Falle von dem Gebrauche der Dampfgleichungen ganz abzusehen und dafür die allgemein gültigen Zustandsgleichungen, welche

[1]) Clausius, Mech. Wärmetheorie Bd. I. S. 163.

vor allem auch den Durchgang durch den kritischen Punkt rechnerisch verfolgen lassen, einzuführen. Dabei treten uns jedoch die schon oben (S. 55 Anmerkung) näher charakterisierten Schwierigkeiten entgegen, die sich überdies noch durch unsere zur Zeit sehr unvollständige Kenntnis des Verhaltens der spezifischen Wärmen und bei einigen wichtigen Körpern durch die noch gänzlich unzureichende Feststellung der kritischen Konstanten vermehren. Diese Schwierigkeiten lassen sich einigermafsen umgehen, wenn man die Verwendung der Dampfgleichungen solange zuläfst, als $x \leqq 1$ ist, und von diesen Punkten an eine neue Zustandsgleichung einführt, die dem Zustande der Überhitzung empirisch thunlichst angepafst ist. Allerdings ist man auch hier gezwungen, über die spezifischen Wärmen der überhitzten Dämpfe Annahmen zu machen, für welche die experimentelle Bestätigung häufig noch aussteht. Aus diesem Grunde haftet der nachstehend gegebenen Lösung der Aufgabe ein hypothetischer Charakter an, der mir wenigstens eine rechnerische Verwertung der gewonnenen Resultate als unzweckmäfsig erscheinen läfst. Doch möchte ich der Vollständigkeit halber die Untersuchung nicht übergehen.

Es sei in Fig. 7 das Diagramm der Druckkurven einer theoretisch vollkommenen Heifsdampfmaschine dargestellt, in dem die Zustandsänderungen also in der Richtung des Uhrzeigers verlaufen. Bei der Expansion von T_1 auf T_2 möge der arbeitende Körper, der vorher ein überhitzter Dampf war, bei $\mathfrak{T}'$ in den gesättigten Zustand übergehen und nach Zurücklegung der Druckkurven $T_2\theta_2$, $\theta_2\theta_1$ während der adiabatischen Kompression von θ_1 auf T_1 diesen

Sättigungszustand bei $\mathfrak{T}''$ wieder verlassen. Selbstverständlich können diese Übergangspunkte auch auf den anderen Druckkurven liegen.

Unsere Aufgabe besteht nun zunächst darin, den Kreisprozefs, der im allgemeinen durch diese Übergänge, welche unter sonst gleichen Umständen für verschiedene Körper bei ganz verschiedenen Temperaturen stattfinden können, mit den Wärmemengen Q_1 und Q_2, sowie der Arbeitsleistung AL so lange unbeeinflufst bleibt, als die Temperaturen T_1 $T_2\,\theta_1\,\theta_2$ festgehalten werden, zu untersuchen. Zu diesem Zwecke verbinden wir, was immer möglich ist, die beiden Punkte $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}''$ sowohl, wie auch T_2 mit $\mathfrak{T}''$ im Diagramm Fig. 7 durch umkehrbare Druckkurven und lassen den arbeitenden Körper die drei auf diese Weise erhaltenen Kreisprozesse in der Reihenfolge

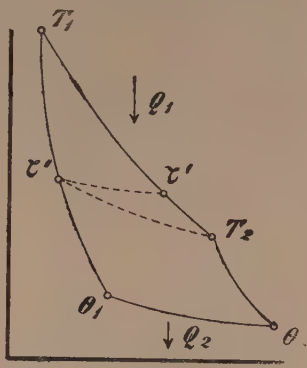


Fig. 7.

$$\mathfrak{T}''\,T_1\,\mathfrak{T}'\,\mathfrak{T}'',\quad \mathfrak{T}''\,\mathfrak{T}'\,T_2\,\mathfrak{T}'',\quad \mathfrak{T}''\,T_2\,\theta_2\,\theta_1\,\mathfrak{T}''$$

durchlaufen. Um dies durchführen zu können, ist es notwendig, zwei neue Körper einzuschalten, deren erster M für den ersten Kreisprozefs als Kühlkörper, für den zweiten dagegen mit dem ursprünglichen Heizkörper H zusammen als Heizkörper dient. Der zweite Körper N dient dann für den zweiten Kreisprozefs als Kühlkörper und für den dritten als Heizkörper, während dort die Wärme durch den

ursprünglichen Kühlkörper K aufgenommen wird. Setzen wir entsprechend unseren früheren Annahmen wieder voraus, dafs die spezifischen Wärmen c' und c'' dieser beiden neuen Körper M und N (z. B. bei konstantem Druck) als unveränderlich betrachtet werden können und bezeichnen mit $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}''$ ohne weiteres die diesen Punkten in den Druckkurven entsprechenden Temperaturen, so haben wir mit Rücksicht auf die Umkehrbarkeit sämtlicher Zustandsänderungen nach Gleichung (3) bezw. (11)

für $\mathfrak{T}'' T_1 \mathfrak{T}' \mathfrak{T}''$

$$Hc_1 \lg n \frac{T_1}{\mathfrak{T}'} + Mc' \ln \frac{\mathfrak{T}'}{\mathfrak{T}''} = 0 \quad . \quad . \quad (124),$$

für $\mathfrak{T}'' \mathfrak{T}' T_2 \mathfrak{T}''$

$$Mc' \lg n \frac{\mathfrak{T}''}{\mathfrak{T}'} + Hc_1 \lg n \frac{\mathfrak{T}'}{T_2} + Nc'' \lg n \frac{T_2}{\mathfrak{T}''} = 0 \quad (125)$$

und endlich für $\mathfrak{T}'' T_2 \theta_2 \theta_1 \mathfrak{T}''$

$$Nc'' \lg n \frac{\mathfrak{T}''}{T_2} + Kc_2 \lg n \frac{\theta_2}{\theta_1} = 0 \quad . \quad . \quad (126).$$

Durch Addition dieser 3 Gleichungen fallen alle neu eingeführten Gröfsen heraus, und es bleibt die bekannte Gleichung (11)

$$Hc_1 \lg n \frac{T_1}{T_2} + Kc \lg n \frac{\theta_2}{\theta_1} = 0 \quad . \quad . \quad (127),$$

womit der Nachweis geliefert ist, dafs ein teilweiser Übergang des arbeitenden Körpers aus dem gesättigten Zustand in den überhitzten an der theoretischen Vollkommenheit der Maschine nichts ändert. Auch unser Schema kann vollständig beibehalten werden, da die Trennung des Prozesses in drei einzelne Kreisprozesse nur eine fiktive war, die, wie wir sogleich sehen werden, sich besonders

nützlich zur Fixierung der beiden Temperaturen $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}''$ erweisen wird.

Für die spezielle Behandlung des Problems wollen wir nun von der Annahme ausgehen, dafs der arbeitende Körper sich oberhalb der Druckkurve $\mathfrak{T}'\mathfrak{T}''$ wie ein vollkommenes Gas, unterhalb derselben dagegen wie ein Dampf verhalten solle. Dann mufs die Linie $\mathfrak{T}'\mathfrak{T}''$ mit der sog. Grenzkurve des Dampfes im trocken gesättigten Zustande zusammenfallen. Es seien weiter die den Temperaturen $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}''$ entsprechenden Veränderlichen:

bei $\mathfrak{T}'$: $x_0' = 1, u_0' \; p_0' \; \varrho_0' \; r_0' \; \tau_0' \; \sigma_0'$, sowie v_0' bezw. V_0',

» $\mathfrak{T}''$: $x_0'' = 1, u_0'' \; p_0'' \; \varrho_0'' \; r_0'' \; \tau_0'' \; \sigma_0''$, » v_0'' » V_0'',

während für die drei charakteristischen Temperaturen $T_2 \theta_2 \theta_1$ die oben (S. 76) gegebenen Bezeichnungen, für T_1, dagegen die Werte $p_1' \, v_1'$ bezw. V_1', welche aus den Gleichungen für vollkommene Gase zu berechnen sind, eingeführt werden sollen.

Das Gewicht des arbeitenden Körpers sei G kg, seine spezifischen Wärmen im Gaszustande wieder c_p und c_v, welche in dem konstanten Verhältnisse $k = c_p : c_v$ stehen mögen; dann werden nach früheren Gleichungen die beiden Zustandsänderungen von $\mathfrak{T}'$ nach $\mathfrak{T}''$ und von T_1 nach T' nach den Gesetzen

$$\left(\frac{\mathfrak{T}'}{\mathfrak{T}''}\right)^{\frac{\mu}{\mu-1}} = \frac{p_0'}{p_0''} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (128),$$

$$\left(\frac{T_1}{\mathfrak{T}'}\right)^{\frac{m}{m-1}} = \frac{p_1'}{p_0'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (129)$$

verlaufen, worin wegen (79)

$$\frac{\mu}{\mu-1} = \frac{Mc'}{G} \frac{1}{c_p - c_v} + \frac{k}{k-1} \quad . \quad . \quad (130),$$

$$\frac{m}{m-1} = \frac{Hc_1}{G}\frac{1}{c_p - c_v} + \frac{k}{k-1} \quad . \quad . \quad (131)$$

sein muſs. Damit aber können wir statt (128) und (129) schreiben

$$\left(\frac{Mc'}{G}\frac{1}{c_p - c_v} + \frac{k}{k-1}\right) \operatorname{lgn} \frac{\mathfrak{T}'}{\mathfrak{T}''} = \operatorname{lgn} \frac{p_0'}{p_0''} \quad (128a),$$

$$\left(\frac{Hc_1}{G}\frac{1}{c_p - c_v} + \frac{k}{k-1}\right) \operatorname{lgn} \frac{T_1}{\mathfrak{T}'} = \operatorname{lgn} \frac{p_1'}{p_0'} \quad (129a).$$

Dazu tritt die Gleichung für die adiabatische Zustandsänderung zwischen $\mathfrak{T}''$ und T_1'

$$\frac{k}{k-1} \operatorname{lgn} \frac{\mathfrak{T}''}{T_1} = \operatorname{lgn} \frac{p_0''}{p_1'} \quad . \quad . \quad . \quad (132).$$

Für den zweiten Kreisprozefs gilt zunächst zwischen $\mathfrak{T}''$ und $\mathfrak{T}'$ nach (109), da hier $x_0' = 1$ und $x_0'' = 1$,

$$\frac{Mc_1}{G} \operatorname{lgn} \frac{\mathfrak{T}''}{\mathfrak{T}'} = \tau_0'' - \tau_0' + \frac{r_0''}{\mathfrak{T}''} - \frac{r_0'}{\mathfrak{T}'} \quad . \quad (133),$$

zwischen $\mathfrak{T}'$ und T_2

$$\frac{Hc_1}{G} \operatorname{lgn} \frac{\mathfrak{T}'}{T_2} = \tau_0' - \tau_2' + \frac{r_0'}{\mathfrak{T}'} - \frac{x_2' r_2'}{T_2} \quad . \quad (134),$$

und zwischen T_2 und $\mathfrak{T}''$

$$\frac{Nc''}{G} \operatorname{lgn} \frac{T_2}{\mathfrak{T}''} = \tau_2' - \tau_0'' + \frac{x_2' r_2'}{T_2} - \frac{r_0''}{\mathfrak{T}''} \quad (135).$$

Für den dritten Kreisprozefs haben wir endlich zwischen $\mathfrak{T}''$ und T_2

$$\frac{Nc''}{G} \operatorname{lgn} \frac{\mathfrak{T}''}{T_2} = \tau_0'' - \tau_2' + \frac{r_0''}{\mathfrak{T}''} - \frac{x_2' r_2'}{T_2} \quad (136),$$

zwischen T_2 und θ_2

$$0 = \tau_2' - \tau_2'' + \frac{x_2' r_2'}{T_2} - \frac{x_2'' r_2''}{\theta_2} \quad . \quad (137),$$

zwischen θ_2 und θ_1

$$\frac{Kc_2}{G} \lg \frac{\theta_2}{\theta_1} = \tau_2'' - \tau_1'' + \frac{x_2'' r_2''}{\theta_2} - \frac{x_1'' r_1''}{\theta_1} \quad (138),$$

und zwischen θ_1 und $\mathfrak{T}'$

$$0 = \tau_1'' - \tau_0' + \frac{x_1'' r_1''}{\theta_1} = \frac{r_0'}{\mathfrak{T}'} \quad . \quad . \quad (139).$$

Eliminiert man in dieser Serie von Gleichungen die Hilfsgröfse Mc' durch Zusammenfassen von (128a), (129a) und (132), und Nc'' durch Addition von (135) und (136), so ergibt die algebraische Addition der übrigen wieder (127).

Die zahlenmäfsige Verwertung dieser Gleichungen ist recht umständlich und bietet wenig Neues. Wir wollen uns darum begnügen, sie nur anzudeuten, zumal ja die überhitzten Dämpfe auch nur sehr unvollkommen dem Mariotte-Gaye-Lussacschen Gesetze folgen.[1])

Aus der Zahl der verfügbaren Gleichungen erkennt man mit Rücksicht auf den durch die Dampftabellen gegebenen Zusammenhang einzelner Werte, z. B. τ_0', r_0', p_0' mit $\mathfrak{T}'$ u. s. w. sofort, dafs von den sechs unbekannten Gröfsen G, x_1'', x_2'', x_2', $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{T}''$ zwei willkürlich gewählt werden können, so dafs auch hier wieder eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit von Kreisprozessen vorliegt. Ist z. B. G und x_2' gewählt, so ergeben sich zunächst x_2'' und x_1'' aus (137) und (138), sodann durch Probieren aus (139) zugleich $\mathfrak{T}''$ und τ_0'', r_0'' und

[1]) Genauere Formeln für überhitzte Dämpfe verdankt man Zeuner. Siehe dessen »Techn. Thermodynamik« Bd. 2. S. 186 ff.

damit auch p_0''. Weiter folgt aus (132) p_1', und wiederum durch Probieren aus (134) $\mathfrak{T}'$ mit r_0', r_0' und p_0'.

Die Berechnung der Volumina und einzelnen Arbeitsbeträge ist endlich für den dampfförmigen Zustand nach den Gleichungen (114) bis (116) bezw. (118) bis (120), für den gasförmigen (überhitzten) Zustand dagegen mit Hilfe von (83) bezw. (85) bis (87) durchzuführen.

28. Allgemeine Folgerungen.

Allen in diesem Abschnitt betrachteten Kreisprozessen sind für die Periode der Wärmeaufnahme und -Abgabe Druckkurven gemeinsam, welche durch die Gleichung

$$d\,Q = C\,d\,T$$

bestimmt werden. Derartige Zustandsänderungen bezeichnet man nun bei vollkommenen Gasen nach Zeuners Vorgange als polytropische. Dehnen wir diese Benennung auf alle elastischen Flüssigkeiten aus, so dürfen wir, da die fraglichen Druckkurven den ganzen Arbeitsvorgang charakterisieren, diesen selbst als polytropischen Kreisprozefs bezeichnen. Dann aber können wir als Ergebnis der vorstehenden Untersuchungen die wichtigen Sätze aussprechen: Die Grenzwerte der thermodynamischen Energieumwandlung werden bei gegebenen Quantitäten des Heiz- und Kühlkörpers durch polytropische Kreisprozesse erreicht, deren charakteristische Temperaturen mit den oberen und unteren Temperaturgrenzen dieser Körper zusammenfallen.

Zwischen diesen charakteristischen Temperaturen sind bei gleicher Energieumwandlung im allgemeinen für jede elastische Flüssigkeit zweimal unendlich viele polytropische Kreisprozesse möglich, denen ebenso viele in ihren Dimensionen verschiedene vollkommene thermodynamische Maschinen entsprechen.

IV.

Schlufsbemerkungen.

29. Rekapitulation.

Wir haben uns bisher ausschliefslich mit thermodynamischen Vorgängen beschäftigt, welche in allen ihren Teilen als umkehrbar betrachtet werden durften, und die Aufgabe, die Grundgesetze theoretisch vollkommener Maschinen aufzustellen, unter gewissen Voraussetzungen über die spezifischen Wärmen des Heiz- und Kühlkörpers gelöst. Wir haben auch hervorgehoben, dafs eine Verallgemeinerung dieser Annahmen an unserer Behandlung des Problems prinzipiell nichts ändern, dasselbe aber analytisch viel verwickelter gestalten würde. Aus diesem Grunde glaubten wir von einer weitergehenden Verfolgung unserer Untersuchungen im allgemeinen Teile absehen zu können.

Im speziellen Teile gelang es uns, durch Beschränkung unserer Betrachtungen auf elastische Flüssigkeiten als arbeitende Körper für die beiden Hauptgattungen vollkommener thermodynamischer Maschinen ein gemeinsames Schema aufzustellen,

dessen Dimensionen und Einzelleistungen stets mit Hilfe zweier willkürlicher Annahmen berechnet werden konnten. Die am Schlusse des allgemeinen Teiles betrachtete Vereinigung zweier solcher Maschinen zu einer kombinierten theoretisch vollkommenen Maschine, welche dadurch ausgezeichnet war, dafs irgend welche Arbeitsleistungen gar nicht aufzutreten brauchten, haben wir dagegen nicht weiter verfolgt. Dafs dieselbe sich ohne weiteres durch Verbindung einer vollkommenen Wärmekraftmaschine mit einer ebensolchen Kühlmaschine, deren Arbeitsbeträge sich gegenseitig aufheben, erreichen läfst, ist evident, ob es aber aufser dieser Lösung noch andere gibt, wage ich nicht zu entscheiden. Die bisher in der Technik nach dieser Richtung hin angestellten Versuche beschränken sich auf die sogenannten Absorptionsmaschinen, in denen Erscheinungen auftreten, deren Gesetze noch nicht hinreichend bekannt sind, um daraus analytische Folgerungen zu ziehen. Aufserdem sind die praktisch erzielten ökonomischen Resultate dieser Maschinen sehr wenig befriedigend, so dafs es fraglich erscheint, ob man auf diesem Wege dem Ideal der thermodynamischen Maschinen näher kommen kann, als durch Trennung der beiden Kreisprozesse.

30. Geschlossene und offene Maschinen.

Schliefslich ist noch die Bemerkung wichtig, dafs wir bei allen unseren Untersuchungen stillschweigend sogenannte geschlossene Maschinen vorausgesetzt haben, d. h. Vorrichtungen, in denen ein und derselbe arbeitende Körper unaufhörlich den vorgeschriebenen Kreisprozefs vollzieht.

Denkt man sich — und dies ist der Willkürlichkeit zweier Variabelen wegen stets möglich — den Druck und die Temperatur an irgend einer Stelle des Kreisprozesses mit dem der Umgebung, also der äufseren Atmosphäre, übereinstimmend, so könnte, wenn der arbeitende Körper aus Luft oder einem von dieser nur wenig verschiedenen Gase (z. B. Verbrennungsprodukte von Leuchtgas u. s. w.) besteht, die Maschine an dieser Stelle geöffnet, d. h. der arbeitende Körper mit der Atmosphäre in Verbindung gebracht werden, ohne dafs der Kreisprozefs irgend welche Änderung erfährt. Dies bleibt auch noch richtig, wenn man in dem fraglichen Punkte des Kreisprozesses den Körper ganz aus der Maschine entfernt und durch neueintretende Luft ersetzt.

Auf diese Weise erhalten wir dann eine offene Maschine, welche mit der geschlossenen, die zwischen denselben charakteristischen Temperaturen arbeitet, gleichwertig ist.

31. Vollkommene Gasmaschine.

Von solchen offenen Maschinen haben nun in neuerer Zeit die sogenannten Gasmaschinen eine grofse Bedeutung erlangt. Allerdings vollziehen dieselben keine umkehrbaren Kreisprozesse, da in ihnen chemische Verbindungen vor sich gehen, welche bei denselben Temperaturen nicht wieder dissoziiert werden können. Trotzdem ist in diesen Maschinen die Ausnutzung der gebotenen Energie die höchste bisher bekannte, so dafs es wohl am Platze sein dürfte, ihren Kreisprozefs zu verfolgen und insbesondere die Maximalleistung für eine bestimmte Wärmezufuhr festzustellen.

Durch die Verbindung zweier chemisch äquivalenter Körpergewichte G_1 und G_2 wird bekanntlich stets dieselbe Wärmemenge Q_1 frei. Die Verbrennungstemperatur T_1 ist dagegen nicht nur abhängig von den Anfangstemperaturen der in Verbindung tretenden Körper, sondern auch durch deren Gewichte und spezifische Wärme, sowie durch die äufseren Bedingungen der Verbrennung bestimmt. Wir haben schon früher gesehen, dafs unter sonst gleichen Verhältnissen die Verbrennungstemperatur ein Maximum wird, wenn der Vorgang in einem allseitig festgeschlossenen Gefäfse, d. h. bei konstantem Volumen stattfindet. Die Gegenwart indifferenter Körper, wie des Stickstoffes der Luft, wird stets die Höhe der Verbrennungstemperatur beeinträchtigen, mufs aber als ein unvermeidliches Übel mit in Kauf genommen werden.

Wir wollen nun voraussetzen, dafs in der Maschine ein Gemisch von G_1 kg brennbaren Gases, G_2 kg Sauerstoff und G_3 kg Stickstoff vorhanden ist. Die physikalischen Konstanten dieses Gemisches mögen sich von denen des — chemisch anders zusammengesetzten — Gemisches nach der Verbrennung nicht wesentlich unterscheiden und insbesondere soll der Körper vor und nach der Verbrennung sich wie ein vollkommenes Gas verhalten. Ist dann T_0 die absolute gemeinsame Temperatur der Körper vor der Verbrennung, welche mit der der Atmosphäre übereinstimmen soll, so hat man für die bei der Verbrennung frei werdende Wärme

$$Q_1 = c_v (G_1 + G_2 + G_3)(T_1 - T_0) \quad (140),$$

worin c_v die spezifische Wärme des Gemisches bei konstantem Volumen bedeutet, welche vor und

nach der Verbrennung wenigstens mit grofser Annäherung als gleich angesehen werden darf. Diese Gleichung (140) ist weiterhin nur richtig, wenn c_v unabhängig von der Temperatur ist, eine Annahme, die kaum Bedenken erregen dürfte. Weniger genau ist jedoch die ebenfalls von uns später der Einfachheit halber benutzte Voraussetzung, dafs auch die spezifische Wärme für konstanten Druck c_p keine Veränderungen erleidet.

Ist dann V_1 das Volumen des Verbrennungsraumes und R die schon früher erwähnte Gaskonstante, so haben wir für den Druck p' vor der Verbrennung

$$p' V_1 = R(G_1 + G_2 + G_3) T_0 \quad . \quad . \quad (141)$$

und für den Druck p_2 nach derselben

$$p_1 V_1 = R(G_1 + G_2 + G_3) T_1 \quad . \quad . \quad (142).$$

Das Gemisch darf nun, wenn die Maschine die Bedingungen einer vollkommenen erfüllen soll, nicht eher entlassen werden, als bis es durch Expansion die Temperatur T_0 und den Druck p_0 der atmosphärischen Luft erreicht hat. Die Expansion selbst aber kann, da andere Wärmequellen nicht mehr zur Verfügung stehen, im günstigsten Falle nur adiabatisch erfolgen, so zwar, dafs mit $c_p : c_v = k$

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{k}{k-1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (143)$$

wird, während für diesen Endzustand

$$p_0 V_0 = R(G_1 + G_2 + G_3) T_0 \quad . \quad . \quad (144)$$

sein mufs. Das an dieser Stelle des Kreisprozesses neu eintretende Gemisch aus brennbarem Gas und Luft ist nun auf das Volumen V_1, in welchem die

Verbrennung stattfinden soll, zu komprimieren, wozu Arbeit aufgewendet werden muſs. Diese Arbeit wird aber ein Minimum für eine isothermische Verdichtung, welche ihrerseits wieder, wie wir oben sehen, einen unendlich groſsen Kühlkörper oder eine Aggregatzustandsänderung einer endlichen Menge desselben bedingt. Betrachten wir die Atmosphäre selbst als diesen Körper, so können wir denselben ohne weiteres als unendlich groſs betrachten. Jedenfalls ist nach Gleichung (62) für isothermische Zustandsänderungen die Wärmeabfuhr

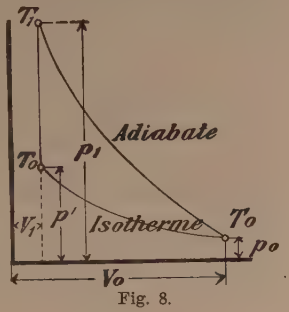


Fig. 8.

$$Q_2 = A \int_{V_0}^{V_1} p\,dV = AR(G_1 + G_2 + G_3)\,T_0 \lg n \frac{V_0}{V_1}$$

oder, da auch

$$\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^k = \frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{k}{k-1}},$$

sowie $AR = c_v(k-1)$ [siehe Gl. (64)],

$$Q_2 = c_v(G_1 + G_2 + G_3)\,T_0 \lg n \frac{T_1}{T_0} \quad . \quad (145).$$

Die bei dem ganzen Kreisprozeſs gewonnene Arbeit ergibt sich aber wieder aus (1)

$$AL = Q_1 - Q_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (146),$$

so daſs wir einen ökonomischen Koeffizienten

$$\frac{AL}{Q_1} = \frac{T_1 - T_0 - T_0 \lg n \frac{T_1}{T_0}}{T_1 - T_0} \quad . \quad . \quad (147)$$

erhalten. Der Kreisprozefs selbst läfst sich sehr einfach durch das Diagramm Fig. 18 darstellen, indem man von dem Punkte $p_0 V_0$ aus je eine Adiabate und eine Isotherme zieht und die Ordinate für T_1 einträgt.

Das Ergebnis unserer Rechnungen nun ist besonders dadurch bemerkenswert, dafs der ökonomische Koeffizient, wie schon früher für geschlossene Maschinen mit umkehrbaren Kreisprozessen, auch hier nur als Funktion der charakteristischen Temperaturen erscheint. Es liegt darum nahe, ihn mit einer unter gleichen Bedingungen arbeitenden geschlossenen Maschine zu vergleichen, wozu wir uns der Formel (25) bedienen wollen. Setzen wir dort $T_2 = \theta = T_0$, so können wir dieselbe auch schreiben

$$\frac{Q_1}{T_1 - T_0} \lg n \frac{T_1}{T_0} = \frac{Q_2}{T_0} \quad . \quad . \quad . \quad (25\,a),$$

woraus sich durch Verbindung mit (1) wieder unsere Formel (147) ergibt.

Damit aber ist der Beweis erbracht, dafs der von uns soeben geschilderte Arbeitsprozefs einer Gasmaschine dem einer theoretisch vollkommenen, geschlossenen und zwischen denselben charakteristischen Temperaturen arbeitenden Maschine ganz gleichwertig ist.

Allerdings haben wir bei der Entwickelung von (147) einige Voraussetzungen über das Verhalten der in der Gasmaschine arbeitenden Mischung gemacht, welche der Wirklichkeit nicht ganz entsprechen; wenn man aber bedenkt, dafs wir uns diesen Annahmen doch beliebig zu nähern im

stande sind, so wird man die Berechtigung derselben, wenigstens für eine theoretisch vollkommene Gasmaschine anerkennen.

Jedenfalls enthalten diese Darlegungen die Erklärung dafür, dafs in den Gasmaschinen die thermodynamische Energieumwandlung zur Zeit am vollkommensten durchgeführt wird. Dies geht schon aus dem Vergleich der an den Arbeitscylindern solcher Maschinen gewonnenen Indikatordiagramme mit unserer Fig. 8 hervor, welcher eine Übereinstimmung zeigt, wie sie bei keiner anderen Maschinengattung auch nur annähernd erreicht worden ist.

32. Disponible Energie und Wirkungsgrad.

Nachdem wir gesehen haben, dafs sich die in der vorstehenden Arbeit entwickelten Theorien unter gewissen Voraussetzungen auch auf Maschinen anwenden lassen, welche nicht umkehrbare Kreisprozesse vollziehen, möge es gestattet sein, noch einige Bemerkungen über den praktischen Wert unserer Untersuchungen daran zu knüpfen. Dieser praktische Wert liegt in der Möglichkeit einer einwandfreien Bestimmung der disponiblen Energie bei bekannten charakteristischen Temperaturen und für eine gegebene Wärmezufuhr, welche von der Beschaffenheit der hierzu verwendeten Vorrichtung (d. i. der thermodynamischen Maschine und des in derselben arbeitenden Körpers) unabhängig war. Den Quotienten aus dem Äquivalent der im Maximum gewonnenen, bezw. im Minimum aufzuwendenden Arbeit bezeichnen wir als ökonomischen Koeffizienten. Ein solcher Wert läfst sich aber auch für jede wirklich ausgeführte thermo-

dynamische Maschine, die zwischen denselben charakteristischen Temperaturen und mit derselben Wärmezufuhr arbeitet, wie die theoretisch vollkommene, aufstellen. Der Quotient aus den beiden ökonomischen Koeffizienten ergibt dann den sog. thermodynamischen Wirkungsgrad der ausgeführten Maschine, eine Zahl, nach der man die Güte derselben zu beurteilen im stande ist.

Dieser Wirkungsgrad wird bisher in allen physikalischen und technischen Schriften mit Hilfe des ökonomischen Koeffizienten eines Carnotschen Kreisprozesses abgeleitet, dessen beide äufserste Temperaturen mit den entsprechenden des arbeitenden Körpers in der ausgeführten Maschine übereinstimmen. Dabei wird nicht nur übersehen, dafs im allgemeinen die isothermische Wärmezu- und Abfuhr, wie wir oben sahen, gar nicht dem Idealvorgange entspricht, sondern auch, dafs für diesen lediglich die Temperaturen des Heiz- und Kühlkörpers, nicht aber die des arbeitenden Körpers mafsgebend sind.

Ich hoffe, dafs es mir gelungen ist, diesen Irrtum, der insbesondere in der Technik vielfach zu grofsen Mifsverständnissen geführt hat, widerlegt und durch meine Untersuchungen die Grundlage zu einer einwandfreien Beurteilung der thermodynamischen Maschinen festgestellt zu haben.